2015학년도 수시모집 논술전형 자연계열 논술고사

자연과학부

문제 1

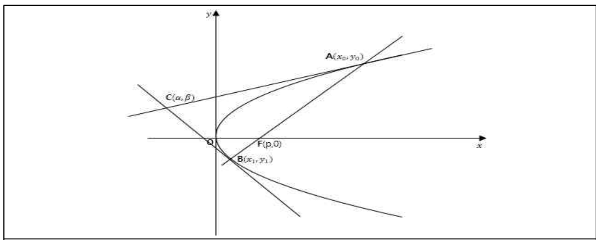
Ⅰ. 문제

<문제 1>

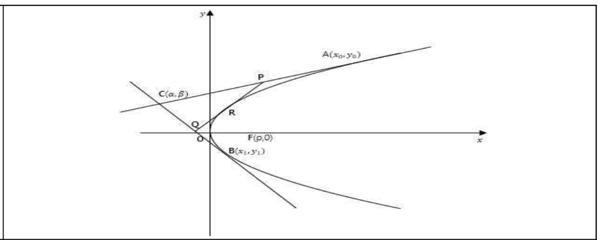
[가] 평면 위에 한 점 F와 그 점을 지나지 않는 한 직선 l이 있을 때, 점 F와 직선 l로부터의 거리가 각각 서로 같은 점의 집합을 포물선이라고 한다. 이 때 점 F를 포물선의 초점, 직선 l을 포물선의 준선이라고 한다.

점 $\mathrm{F}(p,0)$ (단, $p>0$)를 초점으로 하고 y축에 평행한 직선 $x=-p$를 준선으로 하는 포물선의 방정식은 $y^2=4px$ 이다. 임의의 음의 실수 α, 임의의 실수 β에 대하여 좌표평면 위의 점 $\mathrm{C}(\alpha,\beta)$를 지나면서 포물선 $y^2=4px$ 에 접하는 직선은 항상 두 개 존재한다. 이 두 직선이 포물선과 접하는 점을 각각 $\mathrm{A}(x_0,y_0)$, $\mathrm{B}(x_1,y_1)$ (단, $y_0>0$ 이고 $y_1<0$)라고 하자(【그림 1】 참고).

[나] 제시문 [가]에서 $0<t<1$ 인 실수 t에 대하여 선분 AC를 $t:(1-t)$로 내분하는 점을 P, 선분 BC를 $(1-t):t$로 내분하는 점을 Q, 선분 PQ를 $t:(1-t)$로 내분하는 점을 R이라고 하자(【그림 2】 참고).



【그림 1】



【그림 2】

【1-1】 제시문 [가]에서 두 접점의 y좌표 y_0, y_1을 α,β에 관한 식으로 나타내시오.

【1-2】 제시문 [가]에서 점 $\mathrm{C}(\alpha,\beta)$가 준선 위에 있으면 점 $\mathrm{A}(x_0,y_0)$ 와 점 $\mathrm{B}(x_1,y_1)$을 지나는 직선은 초점 $\mathrm{F}(p,0)$를 지남을 보이시오.

【1-3】 제시문 [나]에서 점 R의 좌표를 t, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ 를 이용하여 나타내시오(단, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(x_0,y_0)$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(x_1,y_1)$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(\alpha,\beta)$).

【1-4】 제시문 [나]에서 점 R은 포물선 $y^2=4px$ 위에 있고, 점 R에서의 접선은 직선 PQ 임을 보이시오.

Ⅱ. 출제의도 및 채점기준

1. 출제의도

포물선의 기본적인 성질들의 이해여부를 확인하는 문제이다. 이를 통하여 포물선의 접선, 선분의 내분점, 매개화된 곡선의 접선 등을 구하는 법에 관한 응용력 측정을 하고자 하였고, 기본적인 곡선의 방정식에 관한 정리의 이해도와 연산능력을 확인하고자 하였다.

2. 채점기준

[1-1] 포물선의 접선의 방정식을 구하고 이를 근의 공식을 이용하여 풀이하는 과정을 평가한다.

[1-2] 포물선의 성질과 두 점을 지나는 직선의 방정식을 이용하여 해당 직선이 초점을 지남을 보이는 과정을 평가한다. 또한, 직선과 포물선이 만나는 두 점을 이용한 삼각형의 닮은꼴과 내분점 공식을 이용하여 해당 직선의 x절편이 초점과 동일함을 보이는 것으로 풀이할 수도 있음을 밝힌다.

[1-3] 선분의 내분점을 이용하여 식을 전개해 나가는 과정을 평가한다.

[1-4] 문제의 조건을 통하여 점 R의 좌표를 표현하고 해당 좌표가 포물선 위에 있음을 보인다. 또한 해당 좌표에서의 접선의 기울기가 직선 PQ의 기울기와 동일함을 계산하는 과정을 평가한다.

3. 고등학교 교육과정과의 연계성

문제1은 수학교과서의 기하와 벡터 과정에 나오는 이차곡선에서 포물선 단원과 「수학 II」과정에 나오는 여러 가지 함수의 미분법에서 매개화된 함수의 미분법을 활용하였다.

제시문 [가]와 [나]는 자연계열 학생들이 이수하는 <기하와 벡터> 과목 중 이차곡선 단원에 해당하는 내용이다. 교육과정에 나타나는 이차곡선은 원, 포물선, 타원, 쌍곡선 등이 있으며 이 중 제시문 [가]와 [나]는 포물선의 성질에 대하여 설명하고 있다. 또한, 제시문 [나]에 제시된 내분점의 개념은 고등학교 1학년 과정에서 다루는 <고등학교 수학> 과목 중 평면좌표 단원에 해당하는 내용이다.

문제 [1-1]~[1-4]는 각각 포물선과 직선의 위치 관계, 포물선의 초점과 준선에 대한 성질, 선분의 내분점 벡터, 포물선의 접선의 방정식에 해당하는 내용을 묻고 있다. 이는 자연계열 학생들이 이수하는 ‘기하와 벡터’ 과목 중 이차곡선에 해당하는 내용이며, 여러 가지 이차곡선 중 가장 먼저 소개되는 포물선의 성질을 이용하여 문제가 출제되었다.

Ⅲ. 제시문 분석 및 답안 사례

1. 제시문 분석

제시문 [가]는 평면 위의 한 정점 F와 그 점 F를 지나지 않는 한 정직선 l이 주어졌을 때, 점 F와 직선 l에 이르는 거리가 같은 점 P들의 집합을 포물선이라고 하는 포물선의 정의에 대하여 설명하고 있다. 또한, 포물선의 정의로부터 얻을 수 있는 가장 기본적인 형태의 포물선의 방정식인 $y^2=4px$에 대하여 설명하고 있다. 제시문 [나]는 포물선의 접선과 선분의 내분점의 개념을 결

합하여 제시한 것으로 제시문에 주어진 상황이 [그림 2]로 구체화되어 있다. 기하와 벡터에서 다루는 내분점 벡터의 예시에 해당하는 내용이다.

2. 답안 사례

문제 [1-1]은 한 점에서 포물선에 접선을 그을 때 생기는 접점을 구할 수 있는지를 묻는 문제로 포물선 위의 점에서의 접선의 방정식에 대한 이해가 필요하다. 문제 [1-2]는 포물선의 두 접점을 지나는 직선이 언제 초점을 지나게 되는지 그 조건을 구하는 문제로 준선의 방정식이 $x=-p$임을 이용하면 해결할 수 있다. 문제 [1-3]은 선분의 내분점 벡터를 구하여 연립하는 문제이며, 문제 [1-4]는 주어진 점이 포물선 위에 있는지를 보이고, 어떤 직선이 포물선의 접선이 되는지를 묻는 문제이다. 선분의 내분점 벡터를 구하는 방법, 직선의 방향벡터를 구하는 방법, 매개변수로 주어진 곡선의 속도벡터를 구하는 방법 등 단원에 대한 종합적인 이해가 필요하다.

<문제1 답안 사례>

【1-1】 점 $(\frac{u^2}{4p}, u)$에서 포물선 $y^2=4px$ 과 접하는 직선의 방정식은 $y-u=\frac{2p}{u}(x-\frac{u^2}{4p})$,

즉 $y=\frac{2p}{u}x+\frac{u}{2}$ 이다. 이 직선이 점 (α,β)를 지나면 $\beta=\frac{2p}{u}\alpha+\frac{u}{2}$ 이다.

이 식을 정리하면 $u^2-2\beta u+p\alpha=0$ 이므로 $u=\beta\pm\sqrt{\beta^2+4p\alpha}$ 이다.

그러므로 $y_0=\beta+\sqrt{\beta^2-4p\alpha}$ 이고 $y_1=\beta-\sqrt{\beta^2-4p\alpha}$ 이다.

【1-2】 $\alpha=-p$ 인 경우 【1-1】의 답안에 의해 $y_0=\beta+\sqrt{\beta^2+4p^2}$ 이고 $y_1=\beta-\sqrt{\beta^2+4p^2}$ 이므로

$x_1-x_0=\frac{y_1^2-y_0^2}{4p}=\frac{(y_1-y_0)(y_1+y_0)}{4p}=-\frac{\beta\sqrt{\beta^2+4p^2}}{p}$ 이다.

$\beta=0$이면 $(x_0,y_0)=(p,2p)$이고 $(x_1,y_1)=(p,-2p)$ 이므로 두 점을 지나는 직선은 초점 $\mathrm{F}(p,0)$ 을 지난다. $\beta\neq0$이면 $x_1-x_0\neq0$ 이고 점 (x_0,y_0)과 점 (x_1,y_1)을 지나는 $y-y_0=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$ 이다.

그런데 $\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{4p}{y_1+y_0}=\frac{2p}{\beta}$ 이므로 이 직선의 방정식은 $y=\frac{2p}{\beta}x-\frac{2p}{\beta}x_0+y_0$ 을 얻는다.

$x=p$를 대입하면 우변은 $\frac{2p^2}{\beta}-\frac{2p}{\beta}x_0+y_0$ 이다.

여기에 $x_0=\frac{y_0^2}{4p}=\frac{\beta^2+(\beta^2+4p^2)+2\beta\sqrt{\beta^2+4p^2}}{4p}=\frac{4p^2+2\beta y_0}{4p}=p+\frac{\beta}{2p}y_0$ ----------(1)

을 대입하면 $\frac{2p^2}{\beta}-\frac{2p}{\beta_0}(p+\frac{\beta}{2p}y_0)+y_0=0$ 이므로 이 직선은 $(p,0)$ 을 지난다.

【1-3】 내분점 공식에 의해 $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ 이다.

그런데 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ 이고 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ 이므로

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-t)^2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2t(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t^2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ 로 나타낼 수 있다.

【1-4】 (i) 점 R은 포물선 $y^2=4px$ 위에 있다.

[1-3]에 의하여 $\overrightarrow{OR}=((1-t)^2x_0+2t(1-t)\alpha+t^2x_1, (1-t)^2y_0+2t(1-t)\beta+t^2y_1)$ 이다.

(1)과 같은 방법으로 계산하면 $x_0=-\alpha+\dfrac{\beta y_0}{2p}$, $x_1=-\alpha+\dfrac{\beta y_1}{2p}$ 이고, 이 값을 위의 식에 대입하면 $\overrightarrow{OR}$ 의 x좌표는 $(-4t^2+4t-1)\alpha+(1-t)^2\dfrac{\beta y_0}{2p}+t^2\dfrac{\beta y_1}{2p}$ 이다.

그런데 $y_0+y_1=2\beta$ 이므로 이 식은 $(-4t^2+4t-1)\alpha+\dfrac{(1-2t)\beta y_0}{2p}+\dfrac{t^2\beta^2}{p}$ -------(2) 이다.

이 값을 X라 하자. 같은 방법으로 $\overrightarrow{OR}$의 y좌표는 $(1-2t)y_0+2t\beta$ 임을 보일 수 있다.

이 값을 Y라고 하자. 이제 $Y^2=4pX$ 임을 보이자.

$$\frac{1}{4p}Y^2=\frac{1}{4p}((1-2t)^2y_0^2+4t^2\beta^2+2t(1-2t)y_0\beta)=$$

$$-(1-2t)^2\alpha+\frac{(1-2t)^2\beta y_0}{2p}+\frac{t^2\beta^2}{p}+\frac{t(1-2t)y_0\beta}{2p}$$ 이므로 (2)에 의해 $Y^2=4pX$ 이다.

(ii) 점 R에서의 접선은 직선 PQ이다. 점 R은 선분 PQ의 내분점이므로 직선 PQ 위에 있다. 그러므로 직선 PQ가 접선임을 보이기 위해서는 직선 PQ의 (크기가 1인) 방향벡터와 접선의 (크기가 1인) 방향벡터가 같음을 보이면 된다.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}\\ &=((1-t)\overrightarrow{OC}+t\overrightarrow{OB})-((1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OC})\\ &=t(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC})+(-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})\end{aligned}$$ --------(3) 이다.

t가 0과 1 사이를 움직일 때 점 R이 움직이는 자취는 t로 매개화된 곡선이다.

벡터 $\overrightarrow{OR}$ 을 $(f(t), g(t))$ 라고 하면 $\overrightarrow{OR}=(1-t)^2\overrightarrow{OA}+2t(1-t)\overrightarrow{OC}+t^2\overrightarrow{OB}$ 이므로

점 R에서 속도벡터는 $$\begin{aligned}(f'(t), g'(t)) &= -2(1-t)\overrightarrow{OA}+2(1-2t)\overrightarrow{OC}+2t\overrightarrow{OB}\\ &=2(t(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC})+(-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}))\\ &=2\overrightarrow{PQ}\end{aligned}$$

이다. 그러므로 두 직선은 점 R을 지나고 같은 방향벡터를 가지므로 서로 일치한다.

문제 2

Ⅰ. 문제

<문제 2>

[가] (중간값의 정리) 함수 $f(x)$가 구간 $[a,b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$사이의 임의의 실수 k에 대하여 $f(c)=k$를 만족하는 c가 구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

[나] 좌표평면 위의 일차변환 $f:(x,y) \to (x',y')$ 는 아래와 같이

$$\begin{cases} x' = ax+by \\ y' = cx+dy \end{cases}$$

로 주어진다. 즉, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 이다. 이 때 $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$를 f를 나타내는 행렬이라고 한다. 자연수 n에 대하여 f를 n번 합성한 함수를 f^n이라고 나타낸다.

【2-1】 함수 $f(x)=x^3-2x+\frac{1}{2}$ 이라고 하자. 제시문 [가]를 참고하여 방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 세 실근 α, β, γ(단, $\alpha<\beta<\gamma$) 를 가짐을 보이시오. 또한 각각의 근이 유리수가 아님을 보이시오.

【2-2】 점 $\mathrm{A}(\alpha,0), \mathrm{B}(\beta,0), \mathrm{C}(\gamma,0)$ 는 $y=x^3-2x+\frac{1}{2}$ 위에 있다(단, $\alpha<\beta<\gamma$). 점 $\mathrm{P}_n(n,0)$ (n은 자연수)에 대하여 수열 $\{a_n\}$을 $a_n = \overline{\mathrm{AP}_n} \times \overline{\mathrm{BP}_n} \times \overline{\mathrm{CP}_n}$ 라고 하자. 이 수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 를 구하시오.

【2-3】 행렬 $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$(단, $ad-bc \neq 0$) 가 나타내는 일차변환 f에 의하여 곡선 $y=x^3-2x+\frac{1}{2}$ 이 $y=\frac{2}{27}x^3+1$ 로 옮겨진다고 하자. 이 때 행렬 M을 구하시오.

【2-4】 자연수 n에 대하여 문제 【2-3】에서 구한 일차변환 f를 n번 합성한 함수 f^n 에 의하여 $y=x^3-2x+\frac{1}{2}$ 이 옮겨지는 곡선을 구하시오.

Ⅱ. 출제의도 및 채점기준

1. 출제의도

삼차함수와 근과의 관계 및 중간값 정리의 이해도를 측정하기 위한 문제이다. 특정한 삼차 함수

$y=f(x)$가 주어져 있을 때, 방정식 $f(x)=0$이 세 개의 실근을 가짐을 중간값의 정리를 이용하여 보이고, 이 근들이 무리수임을 보일 수 있는지 측정하고자 하였고, 이 근들로 이루어진 수열의 합을 추론할 수 있는지 알아보고자 출제하였다. 또한, 곡선이 일차변환에 의해 옮겨지는 경우 구체적으로 찾을 수 있는지 확인하고자 하였다.

2. 채점기준

[2-1] 중간값의 정리를 이해하고 값의 대입이나 그래프를 통하여 세 근의 존재를 평가한다. 또한 귀류법을 통하여 각각의 근이 유리수가 아님을 보이는 것을 평가한다.

[2-2] 수열의 성질과 수열의 합의 공식을 이용하여 주어진 식을 수립하고 전개하는 것을 평가한다.

[2-3] 제시문 [나]의 내용을 이용하여 역행렬을 구하고 대입하고 정리해나가는 과정을 평가한다. 또한, 역행렬을 구하지 않고 식을 대입하여 결과값과 계수 비교를 함으로써 원하는 행렬을 구할 수도 있다.

[2-4] 일차변환을 차례대로 합성해 나가면서 함수가 변화된 곡선의 식을 정리해 나감으로써 일반화된 곡선식을 구해가는 과정을 평가한다. 행렬을 수학적 귀납법으로 증명하거나 점화식을 이용하여 풀 수도 있다.

3. 고등학교 교육과정과의 연계성

문제2는「수학 II」과정에 나오는 중간값의 정리를 활용하고,「기하와 벡터」에 나오는 일차변환의 정의를 소개함으로써 이를 응용한 문제를 풀 수 있도록 하였다.

제시문 [가]는 자연계열 학생들이 수강하는 <수학II> 과목 중 함수의 연속 단원에 해당하는 내용이다. 제시문 [나]는 자연계열 학생들이 수강하는 <기하와 벡터> 과목 중 행렬과 일차변환 단원에 해당하는 내용이다. 문제 [2-1]~[2-4]는 각각 중간값의 정리, 수열, 일차변환, 합성변환에 해당하는 내용을 묻고 있다.

Ⅲ. 제시문 분석 및 답안 사례

1. 제시문 분석

제시문 [가]는 중간값의 정리를 서술하고 있으며, 중간값의 정리는 주로 방정식의 해의 존재성을 보이는 데 사용된다. 제시문 [나]는 행렬의 일차변환에 대하여 설명하고 있으며, 행렬의 일차변환을 설명할 때 출발점이 되는 내용이다.

2. 답안 사례

문제 [2-1]에서 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가짐을 보이는 것은 중간값의 정리를 이용하면 쉽게 보일 수 있다. 또한 각각의 근이 유리수가 아니라는 것은 중학교 교육과정에서 다룬 $\sqrt{2}$가 유리수가 아님을 증명하는 것과 유사한 방법으로 증명할 수 있다. 문제 [2-2]는 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 두 점 사이의 거리를 구하는 문제이다. 문제에 주어진 수열의 합 S_n을 구하기 위해서는 자연수의 거듭제곱의 합 공식에 대한 이해가 필요하다. 문제

[2-3]은 주어진 곡선이 일차변환에 의하여 어떤 곡선으로 옮겨지는 지를 묻는 문제이며, 문제 [2-4]는 [2-3]에서 얻은 일차변환을 반복해서 적용하는 합성변환에 대한 문제로 <수학I>에서 다루는 점화식에 대한 이해가 필요하다.

<문제2 답안 사례>

【2-1】 $f(-2)=-8+4+1/2<0,\ f(-1)=-1+2+1/2>0,\ f(0)=1/2>0,$
$f(1)=1-2+1/2<0,\ f(2)=8-4+1/2>0$

이므로 제시문 [나]에 의하여 세 개의 근 α, β, γ가 존재하며 $-2<\alpha<1,\ 0<\beta<1,\ 1<\gamma<2$임을 알 수 있다.

이제는 이 근들이 유리수가 아님을 보이자. 근 $x=a/b$ (단 a,b는 서로소인 정수)라고 두자.

그러면 $f(a/b)=(a/b)^3-2(a/b)+\dfrac{1}{2}=0$

$\Leftrightarrow\ 2a^3-4ab^2+b^3=0\ \Leftrightarrow\ b^3=4ab^2-2a^3=2(2ab^2-a^3)$

마지막 식의 우변의 식 $2(2ab^2-a^3)$이 짝수이므로 좌변의 식 b^3도 짝수이어야 한다. 그러면 b도 짝수이어야 한다.

이제 $b=2k$라고 두면

$2a^3-16ak^2+8k^3=0\ \Leftrightarrow\ a^3-8ak^2+4k^3=0 \Leftrightarrow a^3=8ak^2-4k^3=2(4ak^2-2k^3)$

마지막 식의 우변의 식 $2(4ak^2-2k^3)$이 짝수이므로 좌변의 식 a^3도 짝수이다. 따라서 a도 짝수이다. a,b가 모두 짝수인 것은 서로소라는 가정에 위배되므로, x는 유리수가 아니다.

【2-2】 $k=1$일 때 $a_1=(1-\alpha)(1-\beta)(\gamma-1)$ (왜냐하면 $\alpha,\beta<1, \gamma>1$). $k\geq 2$일 때,

$a_k=(k-\alpha)(k-\beta)(k-\gamma)$가 된다.

따라서

$$S_n=a_1+\sum_{k=2}^{n}(k-\alpha)(k-\beta)(k-\gamma)=-(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)+\sum_{k=2}^{n}(k-\alpha)(k-\beta)(k-\gamma)$$

$$=-2(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)+\sum_{k=1}^{n}(k-\alpha)(k-\beta)(k-\gamma)$$

$$=-2(1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma)+\sum_{k=1}^{n}(k^3-(\alpha+\beta+\gamma)k^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)k-\alpha\beta\gamma)$$

$$=-2(1-0-2+1/2)+\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2-0+(-2)\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{2}n$$

$$=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2-n(n+1)+\frac{n}{2}+1$$

$$=\frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}-\frac{3}{4}n^2-\frac{n}{2}+1$$

【2-3】 M의 역행렬을 구해보면 $M^{-1}=\dfrac{1}{D}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix}$ (단, $D=ad-bc$)가 된다.

따라서 $\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}=M^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y'\end{pmatrix}=\dfrac{1}{D}\begin{pmatrix} dx'-by' \\ -cx'+ay'\end{pmatrix}$,

즉 $x=\dfrac{1}{D}(dx'-by'),\ y=\dfrac{1}{D}(-cx'+ay')$

을 $y=x^3-2x+\dfrac{1}{2}$에 대입하면 $\dfrac{1}{D}(-cx'+ay')=\left(\dfrac{1}{D}(dx'-by')\right)^3-2\left(\dfrac{1}{D}(dx'-by')\right)+\dfrac{1}{2}$.

$y' = \frac{2}{27}(x')^3 + 1$에는 $(y')^3$이 없으므로, 위 식에서 $b=0$이어야 한다.

이를 이용하여 위 식을 간단히 정리하면

$y' = \frac{1}{D^2}\frac{1}{a}d^3(x')^3 + \frac{1}{a}(c-2d)x' + \frac{1}{2a}D$ (여기서 $a \neq 0$ 왜냐하면 $D \neq 0$).

$y' = \frac{2}{27}(x')^3 + 1$과 각각의 계수를 비교하면 $c = 2d$, $\frac{d}{2} = 1$, 즉 $d = 2, c = 4$가 된다.

또한 $\frac{2}{27} = \frac{1}{a^2 d^2}\frac{1}{a}d^3 = \frac{d}{a^3}$, 즉 $a = 3$이 된다. 따라서 $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

【2-4】 $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$라고 할 때, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2x' \\ -4x' + 3y' \end{pmatrix}$ 즉 $x = \frac{1}{3}x'$, $y = -\frac{2}{3}x' + \frac{1}{2}y'$이 된다. 이 식을 연속해서 n번 적용하면 된다. 즉, 이 식을 한 번 적용했을 때 $(n=1)$, $y = x^3 - 2x + \frac{1}{2}$이 $y = \frac{2}{27}(x)^3 + 1$로 된다(문제 [1-3]).

$n=2$인 경우를 구하기 위해, $y = \frac{2}{27}(x)^3 + 1$에 $x = \frac{1}{3}x'$, $y = -\frac{2}{3}x' + \frac{1}{2}y'$을 적용하면

$y' = \frac{2^2}{27^2}(x')^3 + 2(\frac{2}{3}x') + 2$이고 x', y'를 x, y로 변경하면 $y = \frac{2^2}{27^2}(x)^3 + 2(\frac{2}{3}x) + 2$가 된다.

$n=3$인 경우를 구하기 위해, $y = \frac{2^2}{27^2}(x)^3 + 2(\frac{2}{3}x) + 2$에 $x = \frac{1}{3}x'$, $y = -\frac{2}{3}x' + \frac{1}{2}y'$을 적용하면

$$y = \frac{2^3}{27^3}(x)^3 + \left(2^2(\frac{2}{3}\frac{1}{3}) + 2(\frac{2}{3})\right)x + 2^2.$$

$n=4$인 경우를 구하기 위해, 바로 위식에 다시 $x = \frac{1}{3}x'$, $y = -\frac{2}{3}x' + \frac{1}{2}y'$을 적용하면

$$y = \frac{2^4}{27^4}(x)^3 + \left(2^3(\frac{2}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{3}) + 2^2(\frac{2}{3}\frac{1}{3}) + 2(\frac{2}{3})\right)x + 2^3 = \frac{2^4}{27^4}(x)^3 + 2^2\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3\right)x + 2^3$$

$n=5$인 경우를 구하기 위해, 바로 위식에 다시 $x = \frac{1}{3}x'$, $y = -\frac{2}{3}x' + \frac{1}{2}y'$을 적용하면

$$\begin{aligned} y &= \frac{2^5}{27^5}(x)^3 + \left(2^4(\frac{2}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{3}) + 2^3(\frac{2}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{3}) + 2^2(\frac{2}{3}\frac{1}{3}) + 2(\frac{2}{3})\right)x + 2^4 \\ &= \frac{2^5}{27^5}(x)^3 + 2^2\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^4\right)x + 2^4 \end{aligned}$$

따라서 이런 패턴을 임의의 n에 대하여 표현하면 다음의 곡선이 얻어진다.

$$y = \left(\frac{2}{27}\right)^5 x^3 + 2^2\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)x + 2^{n-1}$$

2015학년도 수시모집 논술전형 자연계열 논술고사

공학부

문제 1

I. 문제

<문제 1>

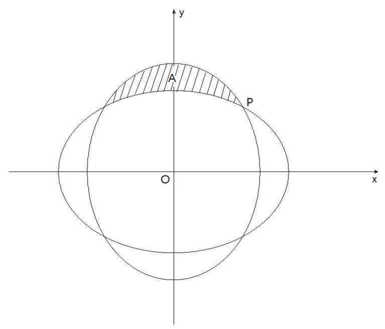
[가] 곡물이나 기름 등을 운반하는 탱크 트럭을 뒤에서 보면 용기의 단면이 원을 살짝 눌러 놓은 듯한 모양인데, 이 도형을 타원이라고 한다. 탱크 트럭에서 타원형 용기를 사용하는 이유는, 부피는 원형 용기보다 조금 작지만 무게중심의 위치가 더 낮기 때문에 트럭이 회전할 때 뒤집힐 가능성은 훨씬 적어지기 때문이라고 한다. 미국의 백악관의 대통령 집무실인 청실(Blue Room)의 천장이 타원으로 이루어져 있다. 또한, 독일의 천문학자 케플러는 태양계 행성의 공전 궤도가 타원임을 발견하였으며, 영국의 수학자 뉴턴은 공전 궤도가 타원임을 수학적으로 증명하였다.

[나] 두 초점 $\mathrm{F}(\mathrm{c},0), \mathrm{F}'(-\mathrm{c},0)$ 에서의 거리의 합이 $2a$인 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (단, $a>c>0,\ b^2=a^2-c^2$)로 주어진다. 이 때 장축의 길이는 $2a$, 단축의 길이는 $2b$이다. 마찬가지로 두 초점 $\mathrm{G}(0,\mathrm{c}), \mathrm{G}'(0,-\mathrm{c})$ 에서의 거리의 합이 $2b$인 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (단, $b>c>0,\ a^2=b^2-c^2$)로 주어진다. 이 때 장축의 길이는 $2b$, 단축의 길이는 $2a$이다.

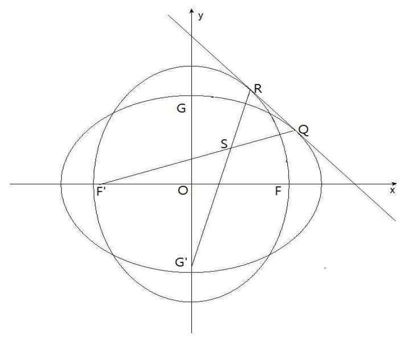
[다] 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 구간 $[a,b]$ 에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a,\ x=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 $\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$ 로 주어진다.

【1-1】 타원의 방정식 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 로 주어진 타원 E_1을 시계 반대 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 회전하여 얻어진 타원을 E_2라 하자. E_1과 E_2가 만나는 교점을 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$ (단, $x_1>0, y_1>0$)라고 하자(【그림 1】 참고). E_1 위의 점 P에서의 접선과 E_2 위의 점 P에서의 접선이 이루는 예각을 θ라고 할 때 $\sqrt{\cot\theta}$ 를 구하시오.

【1-2】 문제 【1-1】에서 정의된 타원 E_1의 두 초점을 F, F'이라고 하고, 타원 E_2의 두 초점을 G, G'이라고 하자(【그림 2】 참고). 두 개의 타원 E_1과 E_2에 동시에 접하는 직선이 E_1과 만나는 점을 $\mathrm{Q}(\mathrm{s}_1, \mathrm{t}_1)$(단, $\mathrm{s}_1>0,\ \mathrm{t}_1>0$) , E_2와 만나는 점을 $\mathrm{R}(\mathrm{s}_2, \mathrm{t}_2)$(단, $\mathrm{s}_2>0,\ \mathrm{t}_2>0$) 이라고 하자. 또한 선분 $\mathrm{F}'\mathrm{Q}$ 와 선분 $\mathrm{G}'\mathrm{R}$ 이 만나는 점을 S라고 하자. 이 때 삼각형 SQR 의 면적을 구하시오.



【그림 1】



【그림 2】

【1-3】 제시문 [다]를 참고하여, 두 곡선으로 둘러싸인 영역 A의 면적을 구하시오(【그림 1】 참고).

【1-4】 영역 A를 직선 $y=-5$의 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 구하시오(【그림 1】 참고).

Ⅱ. 출제의도 및 채점기준

1. 출제의도

타원의 방정식과 회전변환의 이해도를 측정하는 문제이다. 한 개의 타원과 이를 90도 회전이동하여 얻은 타원과의 교점, 공통 접선, 삼각형의 면적, 둘러싸인 영역의 면적과 회전한 회전체의 부피를 찾을 수 있는 능력을 평가하고자 하였다.

2. 채점기준

[1-1] 문제에 나온 것과 같이 회전변환 관계인 두 타원의 식을 서로 연립하여 교점을 구하는 것을 평가한다. 그리고 접선의 기울기를 이용하여 $\sqrt{\cot\theta}$를 구하는 것 역시도 평가한다.

[1-2] 두 타원의 접선의 방정식이 서로 같다는 부분을 이용하여 공통된 접선의 방정식을 구하고 각 타원의 접점이 타원의 초점과 만나는 직선을 구하고, 그 교차점을 구하여 이로 인해 생기는 삼각형의 면적을 구하는 것을 평가한다.

[1-3] 두 타원의 공식을 바탕으로 면적의 공식에 반영하여 구하는 과정을 평가한다. 치환적분을 이용하여 값을 정확히 구하는 부분이 필요하다.

[1-4] 영역 A를 구성하는 도형의 방정식을 회전체의 공식에 반영하여 회전체의 부피를 구하는 과정을 평가한다. 위의 문제와 동일하게 치환적분을 이용하여 값을 정확히 구하는 부분이 필요하다.

3. 고등학교 교육과정과의 연계성

문제1은 고교 일반 교과서의 「기하와 벡터」과정에 나오는 타원의 방정식과 접선의 공식을 활

용하고, 「적분과 통계」에 나오는 면적과 회전체 부피를 치환적분 방법을 이용하였다.

제시문 [가]와 [나]는 자연계열 학생들이 수강하는 <기하와 벡터> 과목 중 이차곡선 단원에 해당하는 내용이다. 제시문 [나]에서는 기하학적인 타원을 수식으로 나타낸 타원의 방정식에 대하여 설명하고 있다. 제시문 [다]는 '적분과 통계' 과목 중 곡선으로 둘러싸인 넓이 단원에 해당하는 내용이다.

문제 [1-1]은 두 타원의 교점을 구할 수 있는지 묻는 문제이다. 문제 [1-2]는 타원의 접선의 방정식과 삼각형의 넓이를 묻는 문제로 방정식을 연립하여 세 점 Q, R, S의 좌표를 구해야 한다. 문제 [1-3]은 두 타원으로 이루어진 영역의 면적을 구하는 문제이다. 문제 [1-4]는 두 타원으로 이루어진 영역을 x축 둘레로 회전하여 얻어진 회전체의 부피를 구하는 문제이다.

Ⅲ. 제시문 분석 및 답안 사례

1. 제시문 분석

제시문 [가]는 실생활에서 찾아 볼 수 있는 타원의 예시를 언급한 것으로, 타원 단원의 도입부분에 들어 있는 내용을 인용하였다. 제시문 [나]에서는 평면 위의 서로 다른 두 정점 F, F′에서의 거리의 합이 일정한 점들의 집합이라는 타원의 정의로부터 얻을 수 있는 가장 기본적인 형태의 타원의 방정식인 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 대하여 설명하고 있다. 한편, 제시문 [다]는 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 정적분을 이용하여 구하는 것을 설명하고 있다.

2. 답안 사례

문제 [1-1]은 두 타원의 교점을 구할 수 있는지 묻는 문제로, 두 타원의 방정식 모두 중심이 원점에 있는 기본적인 형태로, 타원의 방정식이 문제에 제시되어 있어 방정식을 연립하여 교점의 좌표를 구하면 된다. 문제에서 요구하는 $\cot\theta$를 구하기 위해서는 삼각함수의 탄젠트 덧셈정리에 대한 이해가 필요하다. 문제 [1-2]는 타원의 접선의 방정식과 삼각형의 넓이를 묻는 문제로 방정식을 연립하여 세 점 Q, R, S의 좌표를 구해야 한다. 문제 [1-3]은 두 타원으로 이루어진 영역의 면적을 구하는 문제이다. 구하는 영역을 정적분으로 나타낼 수 있는지를 묻고 있는데, 문제 [1-1]에서 두 타원의 방정식이 제시되어 있기 때문에 간단히 정적분으로 나타낼 수 있다. 문제 [1-4]는 $y=-5$ 둘레로 회전시킨다는 점이 약간 다르지만, 이 $y=-5$를 y축으로 5만큼 평행이동하고 주어진 영역도 그만큼 평행이동한 후 x축 둘레로 회전시킨 회전체의 부피를 구하는 공식을 적용하는 것에 대한 이해가 필요하다.

<문제1 답안 사례>

【1-1】 E_1으로부터 $\frac{\pi}{2}$회전하여 얻어진 포물선 E_2의 방정식은 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$로 주어진다.

따라서 $y^2=9(1-\frac{x^2}{16})$를 아래와 같이 대입하면 $\frac{x^2}{9}+\frac{1}{16}(9(1-\frac{x^2}{16}))=1$, 좀 더 간략히 하면

$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{9}+\frac{9}{16}(1-\frac{x^2}{16})=1 \ \Leftrightarrow \ 16x^2+81(1-\frac{x^2}{16})=9\times 16$

$\Leftrightarrow\ 16^2x^2-81x^2=9\times16^2-81\times16 \quad \Leftrightarrow 175x^2=9\times16\times7 \Leftrightarrow x=\pm\frac{12}{5}$

조건에 의하여 $x>0$이므로 $x_1=\frac{12}{5}$이다.

따라서 $y^2=9(1-\frac{x^2}{16})$에 이를 대입하면 $y^2=\frac{3^2\times16^2}{4^2\times5^2}$이므로 $y=\pm\frac{12}{5}$. $y>0$이므로 $y_1=\frac{12}{5}$.

따라서 점 $\mathrm{P}(\frac{12}{5},\frac{12}{5})$을 얻는다.

타원 E_1위의 점 $\mathrm{P}(\frac{12}{5},\frac{12}{5})$에서의 접선의 방정식은 공식에 의하여 $\frac{\frac{12}{5}x}{16}+\frac{\frac{12}{5}y}{9}=1$이다. 이 접선의 기울기 $m_1=-\frac{9}{16}$이다. 이 직선과 양의 x축과 이루는 각을 θ_1이라고 하면 $\tan\theta_1=-\frac{9}{16}$이 된다.

마찬가지 방식으로 타원 E_2위의 점 $\mathrm{P}(\frac{12}{5},\frac{12}{5})$에서 접선의 방정식의 기울기 $m_2=-\frac{16}{9}$가 된다.

두 접선이 이루는 예각을 θ라고 하면 $\theta=\theta_1-\theta_2$를 얻는다.

따라서 $\tan\theta=\tan(\theta_1-\theta_2)=\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}=\frac{-9/16-(-16/9)}{1+9/16\times16/9}=\frac{1}{2}(\frac{16^2-9^2}{9\times16})=\frac{1}{2}\frac{25\times7}{9\times16}$

그러므로 $\sqrt{\cot\theta}=\sqrt{\frac{2\times9\times16}{25\times7}}=\frac{12\sqrt{2}}{5\sqrt{7}}=\frac{12\sqrt{14}}{35}$.

【1-2】 공통접선의 y절편이 양수임을 고려하여, 타원 E_1에 접하는 기울기가 m인 접선의 방정식은 공식에 의하여 $y=mx+\sqrt{m^2\times16+9}$이고 타원 E_2에 접하는 기울기가 m인 접선의 방정식 $y=mx+\sqrt{m^2\times9+16}$이다. 이 두 직선이 서로 같으므로, y절편의 값도 동일해야 한다.

즉 $16m^2+9=9m^2+16 \Leftrightarrow m^2=1 \Leftrightarrow m=\pm1$. 따라서 공통접선의 방정식은 $l_1: y=-x+5$.

한편 타원 E_1위의 점 $\mathrm{Q}(\mathrm{s}_1,\mathrm{t}_1)$에서 접하는 직선의 방정식은

$\frac{s_1x}{16}+\frac{t_1y}{9}=1 \Leftrightarrow y=-\frac{9}{16}\frac{s_1}{t_1}x+\frac{9}{t_1}$이므로 $l_1: y=-x+5$와 비교하면 $s_1=\frac{16}{5}, t_1=\frac{9}{5}$이다.

즉, $\mathrm{Q}(\mathrm{s}_1,\mathrm{t}_1)=\mathrm{Q}(\frac{16}{5},\frac{9}{5})$이다.

마찬가지로 계산하면 타원 E_2위의 점$\mathrm{R}(\mathrm{s}_2,\mathrm{t}_2)$에서 접하는 직선의 방정식은

$\frac{s_2x}{9}+\frac{t_2y}{16}=1 \Leftrightarrow y=-\frac{16}{9}\frac{s_2}{t_2}x+\frac{16}{t_2}$이므로 $l_1: y=-x+5$와 비교하면 $s_2=\frac{9}{5}$, $t_2=\frac{16}{5}$ 이다.

즉, $\mathrm{R}(\mathrm{s}_2,\mathrm{t}_2)=\mathrm{R}(\frac{9}{5},\frac{16}{5})$이다.

Q와 R은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 또한 $\overline{\mathrm{QR}}$는 $\sqrt{\left(\frac{16-9}{5}\right)^2+\left(\frac{9-16}{5}\right)^2}=\frac{7}{5}\sqrt{2}$이다.

한편, 직선 $\mathrm{F'Q}$의 방정식은 $y=\frac{9}{16+5\sqrt{7}}(x+\sqrt{7})$이고 직선 $\mathrm{G'R}$의 방정식은

$y=\frac{16+5\sqrt{7}}{9}(x-\sqrt{7})$이다.

두 직선이 만나는 x좌표는 $x=\frac{9\sqrt{7}}{7+5\sqrt{7}}=\frac{5-\sqrt{7}}{2}$이고 y좌표도 $y=\frac{5-\sqrt{7}}{2}$이 된다.

따라서 $S=\left(\frac{5-\sqrt{7}}{2}, \frac{5-\sqrt{7}}{2}\right)$

원점과 S를 지나는 직선의 방정식은 $y=x$이며 이는 $l_1 : y=-x+5$과 수직임을 알 수 있다.

따라서 S로부터 직선 l_1의 수선의 발은 선분 QR의 중점 $M\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$이 된다. $\overline{SM}=\frac{\sqrt{14}}{2}$이 되므로, 삼각형의 면적은 $\frac{1}{2}\frac{7\sqrt{2}}{5}\frac{\sqrt{14}}{2}=\frac{7\sqrt{7}}{10}$.

【1-3】 E_2내부에는 속하고 E_1내부에는 속하지 않는 영역의 면적을 구하는 문제이다. 이중에 1,2사분면에 있는 부분 A의 면적을 구하면 된다.

$$A=\int_{-12/5}^{12/5}\sqrt{16\left(1-\frac{x^2}{9}\right)}-\sqrt{9\left(1-\frac{x^2}{16}\right)}\,dx=\frac{8}{3}\int_0^{12/5}\sqrt{9-x^2}\,dx-\frac{6}{4}\int_0^{12/5}\sqrt{16-x^2}\,dx$$

우선, 각각의 적분값을 구한 후 간략히 하자. $A_1=\int_0^{12/5}\sqrt{9-x^2}\,dx$라고 하자. 치환 방법을 이용하여 이 값을 구하고자 한다.

$x=3\sin\theta\ (0\le\theta\le\pi/2)$라고 하면, $dx=3\cos\theta\,d\theta$이고 $12/5=3\sin\theta \Rightarrow \sin\alpha=4/5, \cos\alpha=3/5$.

따라서 $A_1=\int_0^{\alpha}\sqrt{9-9\sin^2\theta}\ 3\cos\theta\,d\theta=\int_0^{\alpha}3\cos\theta\,3\cos\theta\,d\theta=9\int_0^{\alpha}\cos^2\theta\,d\theta=\frac{9}{2}\int_0^{\alpha}(1+\cos2\theta)\,d\theta$

$$=\frac{9}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\alpha}=\frac{9}{2}(\alpha+1/2\sin2\alpha)=\frac{9}{2}(\alpha+\sin\alpha\cos\alpha)$$

$$=\frac{9}{2}(\alpha+4/5\times3/5)=\frac{9}{2}(\alpha+12/25)\text{이다.}$$

마찬가지로 $A_2=\int_0^{12/5}\sqrt{16-x^2}\,dx$라고 두고 $x=4\sin\theta\ (0\le\theta\le\pi/2)$라 하면 $dx=4\cos\theta\,d\theta$이고 $12/5=4\sin\theta\Rightarrow\sin\beta=3/5, \cos\beta=4/5$.

따라서

$$A_2=\int_0^{\beta}\sqrt{16-16\sin^2\theta}\ 4\cos\theta\,d\theta=\int_0^{\beta}4\cos\theta\,4\cos\theta\,d\theta=16\int_0^{\beta}\cos^2\theta\,d\theta=\frac{16}{2}\int_0^{\beta}(1+\cos2\theta)\,d\theta$$

$$=8\left[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\beta}=8(\beta+1/2\sin2\beta)=8(\beta+12/25)\text{이다.}$$

따라서 $A=\frac{8}{3}A_1-\frac{3}{2}A_2=12(\alpha+12/25)-12(\beta+12/25)$
$=12(\alpha-\beta)$

(단, α,β는 예각이고, $\sin\alpha=4/5, \sin\beta=3/5$ 만족)

【1-4】 본 회전체는 직선 $y=-5$과 영역 A를 y축으로 $+5$만큼 이동한 후 x축 둘레로 회전하는 것으로 볼 수 있다.

따라서 회전체의 부피 V는

$V=\int_{-12/5}^{12/5}\pi(f(x)+5)^2\,dx-\int_{-12/5}^{12/5}\pi(g(x)+5)^2\,dx$ (단, $f(x)=4\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}$, $g(x)=3\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}$)

$$= \int_{-12/5}^{12/5} \pi(f(x)^2 + 10f(x) + 25)\,dx - \int_{-12/5}^{12/5} \pi(g(x)^2 + 10g(x) + 25)\,dx$$

$$= \pi \int_{-12/5}^{12/5} 16 - \frac{16x^2}{9} + 40\sqrt{1-\frac{x^2}{9}} - 9 + \frac{9}{16}x^2 - 30\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}\,dx$$

$$= 2\pi \int_{0}^{12/5} 7 + \left(\frac{9}{16} - \frac{16}{9}\right)x^2 + \frac{40}{3}\sqrt{9-x^2} - \frac{30}{4}\sqrt{16-x^2}\,dx$$

$$B_1 = \int_0^{12/5} 7 + \frac{9^2 - 16^2}{16\times 9}x^2\,dx = \frac{56}{5},$$

$B_2 = \int_0^{12/5} \frac{40}{3}\sqrt{9-x^2}\,dx = \frac{40}{3}\int_0^{12/5}\sqrt{9-x^2}\,dx.$ $x = 3\sin\theta, dx = 3\cos\theta\,d\theta, 12/5 = 3\sin\alpha_1,$

즉 $4/5 = \sin\alpha_1$. 따라서

$$B_2 = \frac{40}{3}\int_0^{\alpha_1}\sqrt{9-9\sin^2\theta}\,3\cos\theta\,d\theta = \frac{40}{3}\int_0^{\alpha_1} 9\cos^2\theta\,d\theta = 60\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\alpha_1} = 60(\alpha_1 + 12/25)$$

같은 방식으로 $x = 4\sin\theta$라 두면 $3/5 = \sin\alpha_2$이고

$$B_3 = \frac{30}{4}\int_0^{\alpha_2}\sqrt{16-16\sin^2\theta}\,4\cos\theta\,d\theta = \frac{30}{4}\int_0^{\alpha_2} 16\cos^2\theta\,d\theta = 60\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\alpha_2} = 60(\alpha_2 + 12/25)$$

따라서 $V = 2\pi(B_1 + B_2 - B_3)$

$$= \frac{112\pi}{5} + 120\pi(\alpha_1 - \alpha_2)$$

(단, α_1, α_2는 예각이고 $\sin\alpha_1 = 4/5, \sin\alpha_2 = 3/5$ 만족)

문제 2

Ⅰ. 문제

<문제 2>

[가] 일반적으로 좌표평면 위의 변환 $f:(x,\ y)\rightarrow(x',\ y')$ 이 $\begin{cases}x'=ax+by\\y'=cx+dy\end{cases}$ (단, $a,\ b,\ c,\ d$는 상수)의 꼴로 나타날 때, 이러한 변환 f를 일차변환이라고 한다. 좌표평면 위의 점을 직선이나 점에 대하여 대칭인 점으로 옮기는 대칭변환, 원점을 중심으로 θ만큼 회전하는 회전변환, 0이 아닌 실수 k에 대하여 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 $\mathrm{P}'(kx,\ ky)$로 옮기는 닮음변환 등이 일차변환의 예이다. 일차변환 f를 행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

여기서, $X'=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ 라고 놓으면 $X'=AX$ 이다. 임의의 일차변환 f,g에 대하여 f와 g의 합성변환도 일차변환이고, f를 나타내는 행렬을 A, g를 나타내는 행렬을 B라고 하면 $g\circ f$를 나타내는 행렬은 BA이다. 특히 자연수 n에 대하여 f를 n번 합성한 함수 f^n을 나타내는 행렬은 A^n이고, A의 역행렬 A^{-1}가 존재하면 f의 역변환 $f^{-1}:(x',\ y')\rightarrow(x,\ y)$ 도 일차변환이고 f^{-1}를 나타내는 행렬은 A^{-1}이다.

[나] 서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 서로 다른 r개$(n\ge r)$를 택할 때, 이것을 n개에서 r개를 택하는 조합이라 하고, 이 조합의 수를 기호 ${}_n\mathrm{C}_r$로 나타낸다. 순열과 조합의 관계를 이용하여 다음 공식을 얻을 수 있다.

$${}_n\mathrm{C}_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}\qquad(\text{단, } 0<r\le n)$$

이 수는 행렬의 전개식에서도 자주 등장한다. 이차정사각행렬 A와 이차단위행렬 E에 대하여 다음 등식들이 성립한다.

$$(A+E)^2=A^2+{}_2\mathrm{C}_1A+E$$

$$(A+E)^3=A^3+{}_3\mathrm{C}_1A^2+{}_3\mathrm{C}_2A+E$$

$$(A+E)^4=A^4+{}_4\mathrm{C}_1A^3+{}_4\mathrm{C}_2A^2+{}_4\mathrm{C}_3A+E$$

$$(A+E)^5=A^5+{}_5\mathrm{C}_1A^4+{}_5\mathrm{C}_2A^3+{}_5\mathrm{C}_3A^2+{}_5\mathrm{C}_4A+E$$

이 등식에 나타나는 계수들은 $(x+1)^2,(x+1)^3,(x+1)^4,(x+1)^5$ 의 이항전개에서 나타나는 계수와 일치함을 볼 수 있다.

【2-1】 좌표평면 위의 점 $(3,0)$에서 포물선 $y=\frac{4}{3}x^2-\frac{1}{3}x$ 가 일차변환 $f:(x,\ y)\rightarrow(2x,x+3y)$ 에 의하여 옮겨지는 곡선에 이르는 최단거리를 구하시오.

【2-2】 일차변환

$f : (x,\ y) \to (x,\ 0)$,

$g : (x,\ y) \to (0,\ y)$,

h : 직선 $y = mx\,($단$, m \neq 0)$ 에 대한 대칭변환

에 대하여 합성변환 $f \circ h \circ g \circ h \circ f$ 를 나타내는 행렬을 B라고 놓자. 자연수 n에 대하여 $\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} = B^n \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ 라고 할 때, 무한급수 $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$의 수렴, 발산을 설문하고, 수렴하면 그 합을 구하시오.

【2-3】 제시문 [나]를 참고하여 $A = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{5} - 1 & -\sin\frac{2\pi}{5} \\ \sin\frac{2\pi}{5} & \cos\frac{2\pi}{5} - 1 \end{pmatrix}$ 일 때

$$(2\times1)_7C_2E + (3\times2)_7C_3A + (4\times3)_7C_4A^2 + (5\times4)_7C_5A^3 + (6\times5)_7C_6A^4 + (7\times6)_7C_7A^5$$

을 구하시오.

【2-4】 $\sin\frac{\pi}{5}$ 를 s 라고 할 때, 문제 【2-3】의 행렬 A에 대해 A^7 을 s 에 관한 식으로 나타내시오.

Ⅱ. 출제의도 및 채점기준

1. 출제의도

일차변환을 이차곡선에 적용하여 얻어지는 새로운 이차곡선의 방정식을 구할 수 있는 능력을 평가하고자 출제된 문제이다. 일차변환의 합성에 관한 추론 및 연산능력, 이항전개에 관한 정확한 개념 및 활용능력, 삼각함수의 배각공식의 활용 및 응용력 등이 본 문제를 통해 평가된다.

2. 채점기준

[2-1] 일차변환을 이용하여 옮겨진 포물선의 방정식을 구하고 임의의 점을 잡아 최단거리를 구하는 과정을 평가한다.

[2-2] 주어진 합성변환에 의한 행렬을 구하고 이를 이용하여 수열을 구하고 수열의 성질을 파악하는 과정이 필요하다. 수열의 성질을 이용하여 무한급수의 수렴여부를 조사하고 그 합을 구하는 과정과 결과까지 평가한다.

[2-3] 제시문 [나]를 이용하여 직접 이항계수를 계산하여 값을 구하는 것을 평가한다.

[2-4] 회전변환의 상수배와 삼각함수의 배각공식을 사용하여 식을 정리하는 과정을 평가한다. 그리고 이를 문제에서 원하는 방법으로 바꾸어 표현한 답까지 구하는 것이 필요하다.

3. 고등학교 교육과정과의 연계성

제시문은 일차변환과 행렬과의 관계, 이항계수와 이항정리 부분을 발문으로 활용하였다. 고교 교과서의 「기하와 벡터」과정에 나오는 일차변환 단원과 「적분과 통계」에 나오는 이항정리에 관

한 부분을 활용하였다.

제시문 [가]는 자연계열 학생들이 수강하는 <기하와 벡터> 과목 중 행렬과 일차변환 단원에 해당하는 내용이다. 제시문 [나]는 <적분과 통계> 과목 중 이항정리 단원에 해당하는 내용이다.

문제 [2-1]은 주어진 곡선이 일차변환에 의하여 어떤 곡선으로 옮겨지는 지를 묻는 문제이다. 문제 [2-2]는 일차변환의 합성변환과 무한급수를 결합한 문제로 직선에 대한 대칭변환을 나타내는 행렬을 구하는 것이 중요하다. 또한 무한등비급수가 수렴할 조건은 무엇이며 어떤 값으로 수렴하는지에 대한 이해가 필요하다. 문제 [2-3]은 이항계수의 기본 성질을 알고 있는지 묻는 문제로 제시문에 있는 형태로 주어진 식을 변형하는 것이 필요하다. 문제 [2-4]는 삼각함수의 배각공식과 회전변환을 응용하는 문제로 주어진 행렬이 닮음변환행렬과 회전변환을 나타내는 두 행렬의 곱으로 나타내어지도록 변형하는 것이 필요하다.

Ⅲ. 제시문 분석 및 답안 사례

1. 제시문 분석

제시문 [가]는 행렬의 일차변환에서 다루는 일차변환의 개념, 합성변환, 역변환 등에 대하여 요약하여 설명하고 있다. 제시문 [나]는 경우의 수 단원에 나오는 조합의 개념을 설명하고 이것을 활용한 이항정리의 내용을 행렬의 거듭제곱에 응용한 것이다. 특히, 제시문에서는 행렬의 거듭제곱 전개에서 나타나는 계수와 다항식의 거듭제곱 전개에서 나타나는 계수가 일치하는 것을 설명하고 있다.

2. 답안 사례

문제 [2-1]은 한 점에서 옮겨진 곡선에 이르는 최단거리는 두 점사이의 거리를 함수로 정의하고 그 함수의 최솟값을 구하는 것으로 미분을 이용한 극솟값을 구하는 과정이 필요하다. 문제 [2-2]는 일차변환의 합성변환과 무한급수를 결합한 문제로 직선에 대한 대칭변환을 나타내는 행렬을 구하는 것이 중요하다. 또한 무한등비급수가 수렴할 조건은 무엇이며 어떤 값으로 수렴하는지에 대한 이해가 필요하다. 문제 [2-3]은 이항계수의 기본 성질을 알고 있는지 묻는 문제로 제시문에 있는 형태로 주어진 식을 변형하는 것이 필요하다. 문제 [2-4]는 삼각함수의 배각공식과 회전변환을 응용하는 문제로 주어진 행렬이 닮음변환행렬과 회전변환을 나타내는 두 행렬의 곱으로 나타내어지도록 변형하는 것이 필요하다.

<문제2 답안 사례>

【2-1】 일차변환 f에 의해 임의의 점 $(x,\ y)$가 (x', y')으로 옮겨진다고 하면 $x' = 2x, y' = x + 3y$ 이다. 그러므로 $x = \frac{x}{2}, y = \frac{-x+2y}{6}$ 이고 이 값을 포물선의 방정식 $y = \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{3}x$ 에 대입해 풀면 $y' = x'^2$ 을 얻는다. 그러므로 옮겨진 포물선의 방정식은 $y = x^2$ 이다.
한편, 점 $(3,0)$에서 포물선 $y = x^2$ 위의 임의의 점 $(t,\ t^2)$에 이르는 거리를 제곱한 함수를 $d(t)$ 라고 하면 $d(t) = (t-3)^2 + t^4$ 이고 이 식을 t로 미분하면 $d'(t) = 4t^3 + 2t - 6$ 이다.
이 때 우변은 $2(t-1)(2t^2+2t+3)$ 로 인수분해가 되고 $2t^2+2t+3$ 은 판별식이 음수이므로

$t=1$이 $d'(t)=0$의 유일한 실근임을 알 수 있다. 함수 $y=d(t)$는 사차함수이므로 점 $(1,d(1))$에서 유일한 극소점을 갖고 $d(t)$는 $t=1$에서 최솟값을 갖는다. 그러므로 함수 $\sqrt{d(t)}$는 $t=1$에서 최솟값 $\sqrt{5}$를 갖는다.

【2-2】 일차변환 f, g를 나타내는 행렬은 각각 $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ 이다. 이제 일차변환 h를 나타내는 행렬을 구해보자. 좌표평면 위의 임의의 점 $(x,\ y)$에 일차변환 h에 의해 (x', y')으로 옮겨진다고 하면, $(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2})$는 직선 $y=mx$ 위에 있고 $\frac{y'-y}{x'-x}=-\frac{1}{m}$ 이다.

이 식을 정리하면 $\begin{cases} mx'-y'=-mx+y \\ x'+my'=x+my \end{cases}$ 을 얻는다.

연립해서 풀면 $x'=\frac{1-m^2}{m^2+1}x+\frac{2m}{m^2+1}y,\quad y'=\frac{2m}{m^2+1}x+\frac{m^2-1}{m^2+1}y$ 을 얻는다.

그러므로 구하는 행렬은 $\frac{1}{m^2+1}\begin{pmatrix}1-m^2 & 2m\\ 2m & m^2-1\end{pmatrix}$ 이다.

제시문 [가]에 의해 합성변환 $f\circ h\circ g\circ h\circ f$ 를 나타내는 행렬 B는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\frac{1}{m^2+1}\begin{pmatrix}1-m^2 & 2m\\ 2m & m^2-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\frac{1}{m^2+1}\begin{pmatrix}1-m^2 & 2m\\ 2m & m^2-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

이 행렬의 곱을 계산하면 $B=\frac{1}{(m^2+1)^2}\begin{pmatrix}4m^2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\frac{4m^2}{(m^2+1)^2}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ 이다.

그러므로 $\alpha_n=\left(\frac{4m^2}{(m^2+1)^2}\right)^n$ 이다. 수열 $\{\alpha_n\}$은 초항과 공비가 $\left(\frac{2m}{(m^2+1)}\right)^2$인 등비수열이므로 무한급수 $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i$은 $-1<\frac{2m}{(m^2+1)}<1$ 일 때에만 존재한다. $m\neq\pm1$인 모든 실수에 대해 이 부등식은 성립한다. 가정에 의해 $m\neq0$ 이므로 $m\neq0,1,-1$ 인 경우에만 $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i$이 존재하고 그 합은 $\dfrac{\frac{4m^2}{(m^2+1)^2}}{1-\frac{4m^2}{(m^2+1)^2}}=\frac{4m^2}{(m^2-1)^2}$ 이다.

【2-3】 직접 이항계수를 계산해 보면 구하는 식

$(2\times1)_7C_2E+(3\times2)_7C_3A+(4\times3)_7C_4A^2+(5\times4)_7C_5A^3+(6\times5)_7C_6A^4+(7\times6)_7C_7A^5$ ----(1)

은 $(7\times6)(A^5+{}_5C_1A^4+{}_5C_2A^3+{}_5C_3A^2+{}_5C_4A+E)$ 이 됨을 보일 수 있다.

제시문 [나]에 의해 $(A+E)^5=A^5+{}_5C_1A^4+{}_5C_2A^3+{}_5C_3A^2+{}_5C_4A+E$ 이므로

식 (1)은 $42\begin{pmatrix}\cos\frac{2\pi}{5} & -\sin\frac{2\pi}{5}\\ \sin\frac{2\pi}{5} & \cos\frac{2\pi}{5}\end{pmatrix}^5=42\begin{pmatrix}\cos2\pi & -\sin2\pi\\ \sin2\pi & \cos2\pi\end{pmatrix}=42E$ 이다.

【2-4】 먼저 임의의 각 θ에 대해 삼각함수의 배각공식을 사용하면 다음을 보일 수 있다.

$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta - 1 & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta - 1 \end{pmatrix} = -2\sin\theta \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$$

문제에서 주어진 행렬 A는 위 행렬에 $\theta = \frac{\pi}{5}$를 대입하여 얻을 수 있다.

그런데 $\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) & -\sin(\theta - \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta - \frac{\pi}{2}) & \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$ 이므로 $\begin{pmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$은 $\theta - \frac{\pi}{2}$ 만큼 회전 변환을 나타내는 행렬이다.

그러므로 $\begin{pmatrix} \cos 2\theta - 1 & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta - 1 \end{pmatrix}^7 = (-2\sin\theta)^7 \begin{pmatrix} \cos 7(\theta - \frac{\pi}{2}) & -\sin 7(\theta - \frac{\pi}{2}) \\ \sin 7(\theta - \frac{\pi}{2}) & \cos 7(\theta - \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$ 이다.

이로부터 $A^7 = (-2\sin\frac{\pi}{5})^7 \begin{pmatrix} -\sin\frac{7\pi}{5} & -\cos\frac{7\pi}{5} \\ \cos\frac{7\pi}{5} & -\sin\frac{7\pi}{5} \end{pmatrix}$

$$= (-2\sin\frac{\pi}{5})^7 \begin{pmatrix} \sin\frac{2\pi}{5} & \cos\frac{2\pi}{5} \\ -\cos\frac{2\pi}{5} & \sin\frac{2\pi}{5} \end{pmatrix} = -(2\sin\frac{\pi}{5})^7 \begin{pmatrix} \sin\frac{2\pi}{5} & \cos\frac{2\pi}{5} \\ -\cos\frac{2\pi}{5} & \sin\frac{2\pi}{5} \end{pmatrix}$$

을 얻을 수 있다. 다시 한 번 삼각함수의 배각공식을 이용하면

$$A^7 = -(2\sin\frac{\pi}{5})^7 \begin{pmatrix} 2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} & 1 - 2\sin^2\frac{\pi}{5} \\ -1 + 2\sin^2\frac{\pi}{5} & 2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} \end{pmatrix}$$

$s = \sin\frac{\pi}{5}$라 놓으면 $\cos\frac{\pi}{5} = \sqrt{1 - s^2}$ 이므로 $A^7 = -2^7 s^7 \begin{pmatrix} 2s\sqrt{1 - s^2} & 1 - 2s^2 \\ -1 + 2s^2 & 2s\sqrt{1 - s^2} \end{pmatrix}$ 이다.