2021학년도 서강대학교
모의논술 자료집 2차
- 자연계열 -

서강대학교 입학처

목 차

■ **유의사항**
1. 시험시간은 50분입니다.

문제

높이가 $H(H>2)$인 항아리에 물이 가득 채워져 있다. 이 항아리 바닥에 갑자기 작은 구멍이 생겨 물이 새기 시작한다. 항아리 바닥으로부터 수면까지의 높이가 $x(x>0)$일 때, 수면의 넓이는 $f(x)$이고, 구멍을 통해 빠져나가는 물의 부피는 시간 당 $2x$이다. 함수 $f(x)$는 구간 $[0, H]$에서 연속이고 모든 $h \in (0, H]$에 대하여 다음 식을 만족한다.

$$\int_0^h f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{h}{n}\right)^3 e^{-\frac{h}{n}} + 4\left(\frac{h}{n}\right)^3 e^{-\frac{2h}{n}} + 9\left(\frac{h}{n}\right)^3 e^{-\frac{3h}{n}} + \cdots + n^2\left(\frac{h}{n}\right)^3 e^{-h}\right\}$$

함수 $f(x)$를 구하시오.

2. 수면의 높이가 x일 때, 항아리에 채워진 물의 부피를 나타내는 함수 $V(x)$를 구하시오.

3. 수면의 높이가 x일 때, 수면의 하강 속력을 구하시오.

4. 수면의 하강 속력이 가장 작을 때, 수면의 높이와 하강 속력을 구하시오.

제시문

[가] 닫힌구간 $[a, b]$의 임의의 점 x에서 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$인 입체도형의 부피 V는 다음과 같다.

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

[나] 미분가능한 두 함수 $y = f(u)$, $u = g(x)$에 대하여 합성함수 $y = f(g(x))$의 도함수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

[다] 함수 $f(t)$가 실수 a를 포함하는 구간에서 연속이면 이 구간에 속하는 임의의 x에 대하여 다음이 성립한다.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

▢ 출제의도 및 채점기준

1. 출제의도

· 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이용할 수 있는지를 평가
· 부분적분법을 이용하여 정적분을 계산할 수 있는지를 평가
· 합성함수의 미분법을 활용할 수 있는지를 평가
· 함수의 도함수를 이용하여 함수의 개형을 찾고 최솟값을 구할 수 있는지를 평가

2. 문항해설

[제시문 해설]

제시문 [가]는 “고등학교 [미적분] III 적분법, 2 정적분의 활용”에서 발췌한 내용으로 입체도형의 부피를 단면의 넓이의 정적분으로 구하는 방법을 제시한다.

제시문 [나]는 “고등학교 [미적분] II 미분법, 2 여러 가지 미분법”에서 발췌한 내용으로 합성함수의 도함수를 구하는 방법을 제시한다.

제시문 [다]는 “고등학교 [수학II] III 적분, 2 정적분”에서 발췌한 내용으로 정적분과 미분의 관계를 서술한다.

[문항 해설]

문제 1. 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이용하여 주어진 극한값을 정적분으로 나타낼 수 있는지를 평가한다. “고등학교 [미적분] III 적분법, 2 정적분의 활용”에는 급수의 합을 정적분으로 나타내는 방법에 대해 기술되어 있다. 문제에서 주어진 식에서 좌변의 급수의 합을 정적분으로 표현하여 함수 $f(x)$를 구할 수 있다.

문제 2. 단면의 넓이가 알려진 입체도형의 부피를 정적분으로 표현하고 이를 계산할 수 있는지를 평가한다. “고등학교 [미적분] III 적분법, 2 정적분의 활용”에 입체도형의 부피를 단면의 넓이의 정적분으로 표현하는 방법에 대해 기술되어 있다. 이를 이용하면 부피를 나타내는 함수 $V(x)$를 문제 1에서 구한 수면의 넓이 $f(x)$의 정적분으로 나타낼 수 있다. “고등학교 [미적분] III 적분법, 1 여러 가지 적분법”에 정적분의 부분적분법에 대해 기술되어 있다. 이를 이용하여 지수함수와 다항함수의 곱으로 주어진 $f(x)$에 대해 정적분을 구할 수 있다.

문제 3. 항아리 바닥에서 수면까지의 높이에 대한 시간에 따른 변화율을 미분을 이용하여 구할 수 있는지를 평가한다. 고등학교 “[미적분] II 미분법, 2 여러 가지 미분법”에는 합성함수의 도함수에 대해 제시되어 있다. 이를 이용하면 문제에서 주어진 부피의 시간에 따른 변화율과 수면 높이 변화율 사이의 관계를 파악할 수 있다.

문제 4. 함수의 도함수를 이용하여 함수의 개형을 파악하고, 최솟값을 찾을 수 있는지를 평가한다. 수면의 하강 속도를 나타내는 함수의 도함수를 구해보면, 수면 높이가 줄어듦에 따라 수면의 하강 속도는 줄어들다가 다시 증가하는 것을 알 수 있다. 도함수가 0이 될 때, 하강 속도의 최솟값을 찾을 수 있다.

3. 채점기준 및 유의사항

[채점기준]

· 문제 1 (2점): $f(x)$를 구하면 2점
· 문제 2 (2점): 정적분 계산 2점
· 문제 3 (4점): 수면의 하강 속력 4점 (부호 실수 -1점)
· 문제 4 (2점): 최솟값 2점 (부호 실수 -1점)

[유의사항]

· 문제 2에서 합성함수의 미분법 대신 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이용하는 것도 가능하다.
· 문제 3와 4에서 계산 오류에 대해 부분점수는 없으나, 부호의 실수에 한해 1점씩 감점한다.

4. 예시답안

1 . $\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{h}{n}\right)^3 e^{-\frac{h}{n}}+4\left(\frac{h}{n}\right)^3 e^{-\frac{2h}{n}}+9\left(\frac{h}{n}\right)^3 e^{-\frac{3h}{n}}+\cdots+n^2\left(\frac{h}{n}\right)^3 e^{-h}\right\}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{kh}{n}\right)^2 e^{-\frac{kh}{n}}\left(\frac{h}{n}\right)$

로 쓸 수 있다. 여기에서 $\Delta x=h/n$, $x_k=k\frac{h}{n}$이라고 두면, 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이용하여 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}x_k^2e^{-x_k}\Delta x=\int_0^h x^2e^{-x}dx$로 나타낼 수 있다. 따라서, $f(x)=x^2e^{-x}$.

2. 제시문 [가]를 참고하고 부분적분법을 이용해서

$$V(x)=\int_0^x f(z)dz=\int_0^x z^2e^{-z}dz=\left[z^2(-e^{-z})\right]_0^x-\int_0^x 2z(-e^{-z})dz=-x^2e^{-x}+2\int_0^x ze^{-z}dz$$

로 쓸 수 있다. 여기에서 $\int_0^x ze^{-z}dz=\left[z(-e^{-z})\right]_0^x-\int_0^x(-e^{-z})dz=-xe^{-x}-e^{-x}+1$ 이므로,

$V(x)=-e^{-x}(x^2+2x+2)+2$을 구할 수 있다.

3. 제시문 [나]와 [다]를 이용하면 $\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt}=f(x)\frac{dx}{dt}$이다. 여기에서 $\frac{dV}{dt}=-2x$와 $f(x)=x^2e^{-x}$이므로 수면의 하강 속력은 $\left|\frac{dx}{dt}\right|=\frac{2e^x}{x}$이다.

4. 수면의 하강 속력의 도함수는 $\frac{d}{dx}\left(\left|\frac{dx}{dt}\right|\right)=\frac{2e^x(x-1)}{x^2}$이다. 이를 이용하여 아래 그림과

같은 수면 높이에 따른 수면의 하강 속력의 개형을 찾을 수 있다. $x=1$일 때, $\frac{d}{dx}\left(\left|\frac{dx}{dt}\right|\right)=0$ 이 되어, 하강 속력은 최솟값 $2e$를 갖는다.