2022학년도 서강대학교
모의논술 자료집 1차
- 자연계열 -

서강대학교 입학처

목 차

■ **유의사항**

1. 시험시간은 50분입니다.

문제

제시문 [가]-[다]를 참고하여 다음 물음에 답하시오.

【1-1】 n보다 작거나 같은 자연수 k에 대하여, P_{k-1}과 P_k를 잇는 경로의 길이를 L_k라 할 때 $L_k = \sqrt{\frac{12}{n^2}k^2 - \left(\frac{36}{n} + \frac{12}{n^2}\right)k + 27 + \frac{18}{n} + \frac{4}{n^2}}$ 임을 보이시오.

【1-2】 문항 【1-1】에서 정의한 L_k에 대하여, 극한값 $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{L_k^2}{n}$을 구하시오.

【1-3】 두 점 P_0와 P_1을 잇는 경로 위의 점 중에서 밑면으로부터의 높이가 최대인 점을 Q_n이라고 하고, 점 Q_n의 밑면으로부터의 높이를 h_n이라고 하자. h_n을 n에 대한 식으로 나타내고, 극한값 $\lim_{n \to \infty} h_n$을 구하시오.

【1-4】 원뿔의 꼭짓점을 O라고 하고 문항 【1-3】에서 정의한 점 Q_n과 높이 h_n에 대하여 $a_n = \overline{\mathrm{OQ}_n} \times h_n^2$이라고 할 때, $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 $a_n > a_{n+1}$임을 보이시오.

제시문

[가] 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R, 삼각형 ABC의 넓이를 S라고 하면

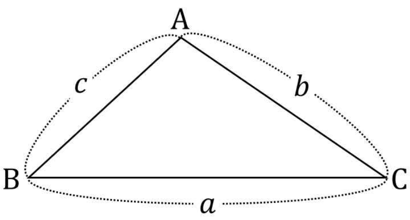
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$$



[나] 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합

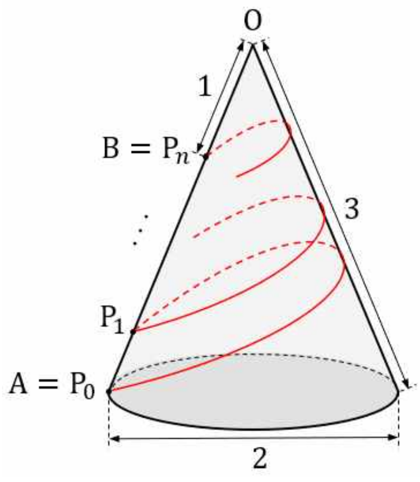
$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

을 기호 $\sum$를 사용하여 $\sum_{k=1}^{n}a_k$와 같이 나타낼 수 있다. 즉

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

이다.

[다] 아래 그림과 같이 모선의 길이가 3이고 밑면의 지름의 길이가 2인 직원뿔 모양의 산이 있다. 원뿔의 한 모선이 밑면과 만나는 점을 출발점 $\mathrm{A}=\mathrm{P}_0$, 이 모선 위에서 정상으로부터 1만큼 떨어진 점을 도착점 B라고 하자. 선분 AB를 n등분한 점에 n개의 전망대 $\mathrm{P}_1, \cdots, \mathrm{P}_n=\mathrm{B}$가 있다(단, n은 1보다 큰 자연수). 또한, A를 출발하여 전망대 $\mathrm{P}_1, \cdots, \mathrm{P}_{n-1}$을 차례로 거쳐 B에 도착하는 경로가 있다. 이때, 두 지점 P_{k-1}과 P_k $(k=1,\cdots,n)$ 사이의 경로는 산 주위를 한 바퀴 회전하면서 두 지점을 최단 거리로 잇는다.



▢ 출제의도 및 채점기준

1. 출제의도

· 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있는지 평가
· $\sum$의 뜻을 알고, 수열의 극한에 대한 기본성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있는지 평가
· 삼각함수와 삼각형의 넓이와의 관계를 이해하고, 수열의 극한에 대한 기본성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있는지 평가
· 삼각함수의 그래프를 이해하고, 도함수를 응용하여 다항함수의 증가와 감소를 판정할 수 있는지 평가

2. 문항해설

[제시문 해설]

제시문 [가]는 2015 개정 교육과정 “[수학Ⅰ] (2) 삼각함수 ① 삼각함수”에 해당하는 제시문이다. 사인법칙, 코사인법칙, 삼각형의 넓이 공식을 서술하였다.

제시문 [나]는 2015 개정 교육과정 “[수학Ⅰ] (3) 수열 ② 수열의 합”에 해당하는 제시문이다. $\sum$의 뜻을 서술하였다.

제시문 [다]는 문항에 사용될 주어진 조건을 서술하였다.

[문항 해설]

문제 1. 두 점을 최단 거리로 잇는 방법은 선분임을 이해하고, 제시문 **[가]**에서 주어진 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 한 변의 길이를 나타낼 수 있는지 평가한다. 2015 개정 교육과정 “[수학Ⅰ] (2) 삼각함수 ① 삼각함수”에서 “사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.”라고 명시하고 있다.

문제 2. 제시문 **[나]**에서 주어진 $\sum$의 뜻을 이해하고, 자연수의 거듭제곱의 합 $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$을 계산할 수 있으며, 수열의 극한에 대한 기본성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있는지 평가한다. 2015 개정 교육과정 “[수학Ⅰ] (3) 수열 ② 수열의 합”에서 “$\sum$의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.”라고 명시하고 있다. 또한, “[미적분] (1) 수열의 극한 ① 수열의 극한”에서 “수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.”라고 명시하고 있다.

문제 3. 제시문 **[가]**에서 주어진 삼각형의 넓이 공식을 이용하여 삼각형의 높이를 구하고, 높이로 이루어진 수열의 극한값을 구할 수 있는지 평가한다. 2015 개정 교육과정 “[수학Ⅰ] (2) 삼각함수 ① 삼각함수”의 교수·학습 방법에 “사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 각의 크

기와 변의 길이 사이의 관계를 이해하고 삼각형의 넓이를 다양한 방법으로 구할 수 있게 한다." 라고 명시하고 있다. 또한, "[미적분] (1) 수열의 극한 ① 수열의 극한"에서 "수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다."라고 명시하고 있다.

문제 4. 삼각함수의 그래프를 이해하고, 도함수를 활용하여 함수의 증가·감소를 판정할 수 있는지 평가한다. 2015 개정 교육과정 "[수학I] (2) 삼각함수 ① 삼각함수"에서 "삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다"라고 명시하고 있다. 또한, "[수학II] (2) 미분 ③ 도함수의 활용"에서 "함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다."라고 명시하고 있다.

3. 채점기준 및 유의사항

[채점기준]

· 문항당 2점(총점 8점)으로 하며 세부 점수는 다음과 같다.

문제 1. $\Delta \mathrm{OP}_{k-1}\mathrm{P}_k$에서, 두 변의 길이 $\overline{\mathrm{OP}_{k-1}}$, $\overline{\mathrm{OP}_k}$와 그 사잇각의 크기를 구하면 1점, 코사인법칙을 사용하여 L_k를 구하면 1점을 부여한다.

문제 2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{L_k^2}{n}$을 전개하여 n에 대한 식으로 나타내면 1점, 극한을 구하면 1점을 부여한다.

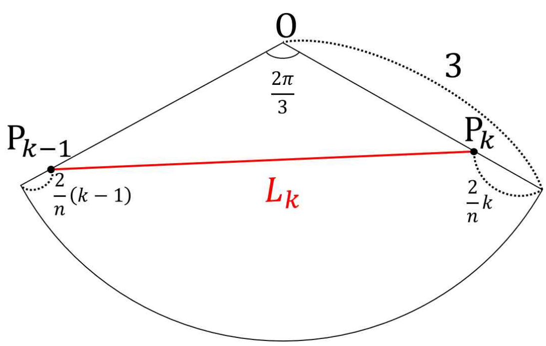
문제 3. h_n을 n에 대한 식으로 나타내면 1점, 극한을 구하면 1점을 부여한다.

문제 4. $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 $a_n > a_{n+1}$임을 증명하면 2점을 부여한다.

[유의사항]

· 문제 3의 풀이에서 h_n을 n에 대한 식으로 나타내지 않고 극한값만 적으면 0점 처리한다.
· 문제 4의 풀이에서 a_n을 n에 대한 식으로만 나타낸 경우, 0점 처리한다.

4. 예시답안



1. P_{k-1}과 P_k 사이의 최단 경로는 그림과 같이 원뿔의 옆면을 펼쳐서 생기는 부채꼴에서, 부채꼴을 이루는 서로 다른 반지름 위에 있는 P_{k-1}과 P_k를 선분으로 연결한 것이다. 이때, 부채꼴의 반지름의 길이는 원뿔의 모선의 길이와 같으므로 3이고, 호의 길이가 밑면의 원주인 2π와 같으므로 중심각은 $\frac{2\pi}{3}$이다. $\Delta \mathrm{OP}_{k-1}\mathrm{P}_k$에서 코사인법칙을 이용하면,

$$L_k^2=\left\{3-\frac{2}{n}(k-1)\right\}^2+\left(3-\frac{2}{n}k\right)^2-2\left\{3-\frac{2}{n}(k-1)\right\}\left(3-\frac{2}{n}k\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$=\frac{12}{n^2}k^2-\left(\frac{36}{n}+\frac{12}{n^2}\right)k+27+\frac{18}{n}+\frac{4}{n^2}$$

이므로 $L_k=\sqrt{\frac{12}{n^2}k^2-\left(\frac{36}{n}+\frac{12}{n^2}\right)k+27+\frac{18}{n}+\frac{4}{n^2}}$ 이다.

2. $\sum_{k=1}^{n}\frac{L_k^2}{n}=\frac{12}{n^3}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\left(\frac{36}{n^2}+\frac{12}{n^3}\right)\frac{n(n+1)}{2}+27+\frac{18}{n}+\frac{4}{n^2}$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{L_k^2}{n}=4-18+27=13$ 이다.

3. 부채꼴의 호 위의 임의의 점 R에 대하여 두 선분 OR과 P_0P_1의 교점을 Q라고 하자. 밑면으로부터의 높이는 $\frac{2\sqrt{2}}{3}\overline{QR}$ 이므로 $\overline{QR}$이 최대일 때, 즉, $\overline{OQ}$가 최소일 때, 높이가 최대가 된다. 따라서, 높이가 최대가 되게 하는 점 Q_n은 O에서 선분 P_0P_1에 내린 수선의 발이다.

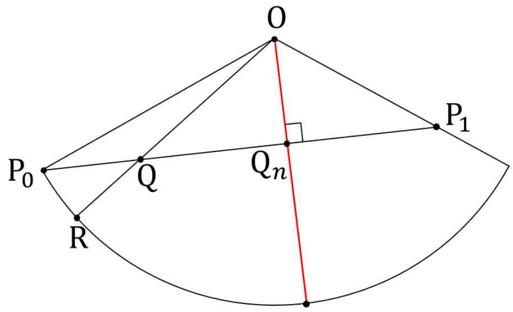
$\overline{OQ_n}=b_n$이라고 놓자. 삼각형 OP_0P_1의 넓이로부터 $\frac{1}{2}L_1b_n=\frac{1}{2}\times3\left(3-\frac{2}{n}\right)\times\sin\frac{2\pi}{3}$ 를 얻게 되어

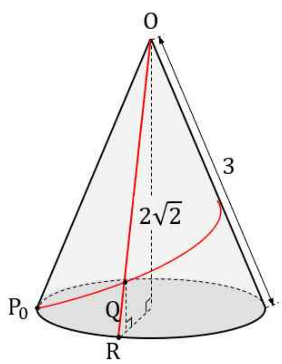
$$b_n=\frac{3\sqrt{3}}{2L_1}\left(3-\frac{2}{n}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(3-\frac{2}{n}\right)\frac{n}{\sqrt{27n^2-18n+4}}$$

이다. 따라서,

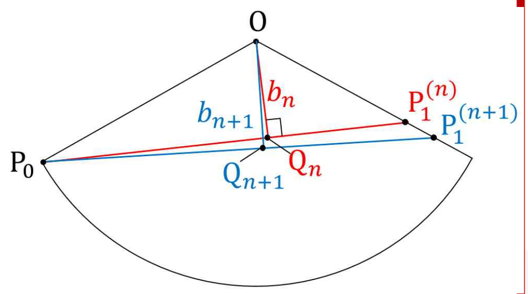
$$h_n=\frac{2\sqrt{2}}{3}(3-b_n)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left\{3-\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(3-\frac{2}{n}\right)\frac{n}{\sqrt{27n^2-18n+4}}\right\}$$

이고 $\lim_{h\to\infty}h_n=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(3-\frac{3\sqrt{3}}{2}\times\frac{3}{\sqrt{27}}\right)=\sqrt{2}$ 이다.





4, n이 커지면, $\overline{\mathrm{OP}_1}$가 길어지므로 $\angle \mathrm{OP}_0\mathrm{P}_1$이 커진다. 선분 AB를 n등분했을 때 P_1을 $\mathrm{P}_1^{(n)}$으로 나타내면,$b_n = 3\sin(\angle \mathrm{OP}_0\mathrm{P}_1^{(n)})$이다. $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여, $0 < \angle \mathrm{OP}_0\mathrm{P}_1^{(n)} < \frac{\pi}{6}$이고 사인함수는 구간 $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$에서 증가한다. 따라서,



$b_n < b_{n+1}$이다. 또한, $b_2 = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{19}} > 1$이고 $\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{3}{2}$이므로, $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여, $b_n \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$이다.

한편, $a_n = \frac{8}{9}b_n(3-b_n)^2$이므로, $f(x) = x(3-x)^2$이라고 하면 $a_n = \frac{8}{9}f(b_n)$이다.

$f'(x) = 3(x-1)(x-3)$이므로, 구간 $\left(1, \frac{3}{2}\right)$에서 $f'(x) < 0$가 되어 f는 감소한다.

따라서, $a_n > a_{n+1}$이다.