2022학년도 서강대학교
모의논술 자료집 2차
- 자연계열 -

서강대학교 입학처

목 차

■ 유의사항
1. 시험시간은 50분입니다.

문제

제시문 [가]-[라]를 참고하여 다음 물음에 답하시오.

【1-1】 함수 $f(x)=\sqrt{1+x}$ 에 제시문 **[가]**를 적용하여 $-1<x<0$ 일 때 부등식 $\sqrt{1+x}<1+\frac{x}{2}$이 성립함을 보이시오.

【1-2】 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 $x\in(a, b)$에 대하여 $f(x)>0$을 만족할 때, $\frac{1}{a-c}+\frac{1}{b-c}=\frac{f'(c)}{f(c)}$ 인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재함을 보이시오.

【1-3】 적당한 다항함수 $g(x)$에 대하여 $f(x)=g(x)(\sin^2 x+2\sin x)$로 표현되며 $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx=-3$을 만족하는 임의의 함수 $f(x)$에 대하여 정적분 $\int_0^{2\pi} x(2\pi-x)f''(x)\,dx$의 값을 구하시오.

【1-4】 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n>0$이고 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$일 때 극한값 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}+a_n}$를 구하시오.

제시문

[가] 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하면 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

[나] 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 미분가능하고, $f'(x)$, $g'(x)$가 연속일 때, 다음 등식이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

[다] 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha$일 때, 수열$\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le c_n \le b_n$을 만족하면 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \alpha$이다.

[라] 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이면 다음 등식이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx \ \left(\text{단, } \Delta x = \frac{b-a}{n},\ x_k = a+k\Delta x\right)$$

▢ 출제의도 및 채점기준

1. 출제의도

· 본 문제를 통하여 다음을 평가하고자 한다.

【1-1】 평균값 정리를 이해하고, 이를 단순히 주어진 상황에 적용할 수 있는지 평가

【1-2】 평균값 정리를 이해하고, 이를 창의적으로 활용할 수 있는지 평가

【1-3】 특정한 상황에서 부분적분을 창의적으로 활용하여 문제를 해결할 수 있는 능력을 평가

【1-4】 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해하고 정적분의 값을 이용하여 급수의 극한값을 구하는 능력을 평가

2. 문항해설

[제시문 해설]

[가] 2015 개정 교육과정 "[수학II] (2) 미분 ① 도함수의 활용"에 해당하는 제시문이다. 평균값 정리를 서술하였다.

[나] 2015 개정 교육과정 "[미적분] (3) ① 여러 가지 적분법"에 해당하는 제시문이다. 부분적분법을 서술하였다.

[다] 2015 개정 교육과정 "[미적분] (1) 수열의 극한 ① 수열의 극한"에 해당하는 제시문이다. 수열의 수렴과 극한에 관한 기본 성질을 서술하였다.

[라] 2015 개정 교육과정 "[미적분] (3) 적분법 ② 정적분의 활용"에 해당하는 제시문이다. 정적분과 급수의 합 사이의 관계을 서술하였다.

[문항 해설]

【1-1】 주어진 함수와 주어진 구간에, 제시문 **[가]**에서 서술한 평균값 정리를 적용하여 주어진 부등식을 증명할 수 있는지 평가한다. 2015 개정 교육과정 "[수학II] (2) 미분 ① 도함수의 활용"에서 "함수에 대한 평균값 정리를 이해한다."라고 명시하고 있다.

【1-2】 앞의 문항과 마찬가지로 제시문 **[가]**에서 서술한 평균값 정리를 적용하여 주어진 부등식을 증명할 수 있는지 평가하고자 하는 문제이다. 하지만 앞의 문항과 달리 부등식의 형태로부터 평균값 정리를 사용하고자 하는 함수를 학생이 직접 찾아서 결론을 이끌어야 하기 때문에 앞의 문항보다 평균값 정리에 대해 훨씬 심화적인 이해와 창의력이 필요한 문제이다.

【1-3】 2015 개정 교육과정 "[미적분] (3) 적분 ① 여러 가지 적분법"에서 "부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다."라고 명시하고 있다. 이 문항은 주어진 적분값을 구하기 위해 제시문 **[나]**에서 서술한 부분적분을 두 번 이용함으로써 올바른 방식으로 문제 해결에 접근할 수 있는지를 평가하고자 한다.

【1-4】 제시문 **[다]**에서 주어진 수열의 극한이 갖는 성질과 제시문 **[라]**에서 주어진 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이용하여 문제에서 제시한 특정 급수의 극한값을 구할 수 있는지 평가한다. 2015 개정 교육과정 ““[미적분] (1) 수열의 극한 ① 수열의 극한”의 교수·학습 방법에 “수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.”라고 명시하고 있다. 또한, “[미적분] (3) 적분법 ② 정적분의 활용”에서 “정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다.”라고 명시하고 있다.

3. 채점기준 및 유의사항

[채점기준]

· 문항당 2점(총점 8점)으로 하며 세부 점수는 다음과 같다.

【1-1】 $f(x)=\sqrt{1+x}$ 에 대하여 닫힌구간 $[x,0]$에 평균값 정리를 적용하면면 1점, 올바른 적용을 통해 $\sqrt{1+x}<1+\frac{x}{2}$을 증명하면 1점을 부여한다.

【1-2】 $g(x)=(x-a)(x-b)f(x)$라 놓고 시작하면 1점, 증명을 완성하면 1점을 부여한다.

【1-3】 $u=x(2\pi-x),\ v'=f''$이라 놓고 부분적분을 사용하면 1점, 다시 한번 부분적분을 사용하여 올바른 답을 구하면 1점을 부여한다.

【1-4】 부등식

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}} \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}+a_n} \le \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{k}{n}}+\sqrt{a_n}\right)\right]$$

을 얻으면 1점, 양변에 극한을 취하여 올바른 답을 얻으면 1점을 부여한다.

[유의사항]

· 【1-3】에서 문항의 조건을 만족하는 특정한 함수를 대입해서 답을 구하는 경우는 0점 처리한다.

· 【1-4】에서 $a_n=0$을 대입하여 답을 구한 경우, 0점 처리한다.

4. 예시답안

【1-1】

$f(x)=\sqrt{1+x}$ 에 대하여 닫힌구간 $[x,0]$에 제시문 **[가]**의 평균값 정리를 적용하면 $x<c<0$ 인
적당한 c가 존재하여

$$\frac{1-\sqrt{1+x}}{-x}=\frac{f(0)-f(x)}{0-x}=f'(c)=\frac{1}{2\sqrt{1+c}}>\frac{1}{2}$$

가 성립하므로 $\sqrt{1+x}<1+\frac{x}{2}$이다.

【1-2】

$g(x)=(x-a)(x-b)f(x)$라 놓으면 $g(x)$는 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 열린구간 (a,b)에서 미분가능하며 $g(a)=g(b)=0$ 이다. 따라서 제시문 **[가]**의 평균값정리에 의하여 $g'(c)=0$인 c가 열린구간 (a,b)에 존재한다.

$$g'(x)=(x-a)f(x)+(x-b)f(x)+(x-a)(x-b)f'(x)$$

로부터 $0=(c-a)f(c)+(c-b)f(c)+(c-a)(c-b)f'(c)$를 얻는다. 등식의 양변을 $(c-a)(c-b)f(c)$로 나누면

$\frac{1}{c-a}+\frac{1}{c-b}+\frac{f'(c)}{f(c)}=0$ 이 성립하여 $\frac{1}{a-c}+\frac{1}{b-c}=\frac{f'(c)}{f(c)}$ 을 얻는다.

【1-3】

$u=x(2\pi-x)$, $v'=f''$이라 놓고 제시문 **[나]**의 부분적분을 사용하면

$$\int_0^{2\pi}x(2\pi-x)f''(x)\,dx=\left[x(2\pi-x)f'(x)\right]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}(2\pi-2x)f'(x)\,dx=-\int_0^{2\pi}(2\pi-2x)f'(x)\,dx$$

이다. 다시한번 부분적분을 하고 $f(0)=f(2\pi)=0$을 사용하면

$$-\int_0^{2\pi}(2\pi-2x)f'(x)\,dx=-\left[(2\pi-2x)f(x)\right]_0^{2\pi}-2\int_0^{2\pi}f(x)\,dx=-2\int_0^{2\pi}f(x)\,dx=6$$ 이다.

그러므로 $\int_0^{2\pi}x(2\pi-x)f''(x)\,dx=6$ 이다.

【1-4】

$x, y > 0$에 대하여 $\sqrt{x+y} < \sqrt{x} + \sqrt{y}$ 이므로 주어진 자연수 n에 대하여

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}} \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}+a_n} \le \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{k}{n}}+\sqrt{a_n}\right)\right]$$ 이 성립한다.

제시문 **[라]**에 의하여

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}} = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}$ 이고 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = 0$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}+a_n} \le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{k}{n}}+\sqrt{a_n}\right)\right] = \frac{2}{3}+0 = \frac{2}{3}$이다.

따라서 제시문 **[다]**에 의하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}+a_n} = \frac{2}{3}$이다.