2023학년도 서강대학교
모의논술 자료집 1차
- 자연계열 -

서강대학교 입학처

목 차

□ 문제 및 제시문 1

□ 출제의도 및 채점기준 3

■ 유의사항
1. 시험시간은 50분입니다.

제시문

[가] 함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

[나] 삼각함수의 덧셈정리

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm tan\beta}{1\mp tan\alpha\tan\beta}$$

[다] 함수 $f(x)$에서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 이것을 기호로

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=L \text{ 또는 } x\to\infty\text{일 때 } f(x)\to L$$

과 같이 나타낸다.

함수 $f(x)$에서 x의 값이 a보다 크면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 L을 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 우극한 이라고 하고, 이것을 기호로

$$\lim_{x\to a+}f(x)=L \text{ 또는 } x\to a+\text{일 때 } f(x)\to L$$

과 같이 나타낸다.

[라] 함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 실수 x_1, x_2에서

$$x_1<x_2\text{일 때, } f(x_1)<f(x_2)$$

이면, 함수 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다고 한다. 또,

$$x_1<x_2\text{일 때, } f(x_1)>f(x_2)$$

이면, 함수 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다고 한다.

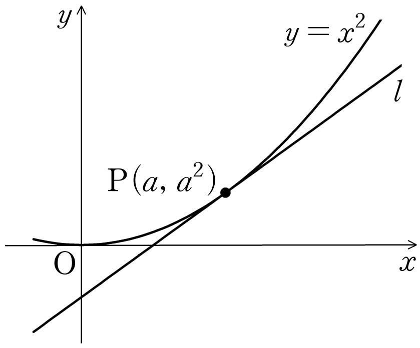
[마] 사잇값의 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구한 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이에 있는 임의의 값 k에 대하여 $f(c)=k$인 c가 a와 b사이에 적어도 하나 존재한다.

<u>문제</u>

제시문 [가]-[마]를 참고하여 다음 물음에 답하시오.

$a>0$이고, 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, a^2)$에서의 접선을 l 이라 하자.



【1-1】 직선 l 과 점 P에서 접하고 x축과 접하는 두 원 중, 직선 l 보다 아래에 있는 원의 반지름을 구하시오.

【1-2】 직선 l 과 점 P에서 접하고 y축과 접하는 두 원 중, 직선 l 보다 위에 있는 원의 반지름을 구하시오.

【1-3】 문제 【1-1】과 【1-2】에서 구한 원의 반지름을 각각 $g(a)$, $h(a)$라 할 때, $f(x)=\dfrac{xh(x)}{g(x)}\ (x>0)$라 하자. 극한값 $\lim_{x\to 0+} f(x)$와 $\lim_{x\to\infty} f(x)$가 존재하는지 조사하고, 존재하면 극한값을 구하시오.

【1-4】 문제 【1-3】에서 주어진 함수 $f(x)$의 정의역이 열린구간 $(0, \infty)$일 때, $f(x)$의 치역을 구하시오.

▢ 출제의도 및 채점기준

1. 출제의도

· 접선의 방정식을 구하고, 이를 활용할 수 있는지 평가
· 직선 및 원의 접선에 대한 기본적인 성질을 잘 이해하고 있는지 평가
· 삼각함수의 덧셈정리를 잘 활용할 수 있는지 평가
· 함수의 극한을 이해하고, 극한값을 잘 구할 수 있는지 평가
· 함수의 증가와 감소를 잘 이해하고, 이를 활용할 수 있는지 평가
· 연속함수의 사잇값의 정리를 적용할 수 있는지 평가

2. 문항해설

[제시문 해설]

· 제시문 [가]는 2015 개정 교육과정 "[수학II] (2) 미분 $\boxed{3}$ 도함수의 활용"에 해당하는 제시문이다. 곡선위의 점에서 접선의 방정식 공식을 서술하였다.
· 제시문 [나]는 2015 개정 교육과정 "[미적분] (2) 미분법 $\boxed{1}$ 여러 가지 함수의 미분"에 해당하는 제시문이다. 삼각함수의 덧셈정리를 서술하였다.
· 제시문 [다]는 2015 개정 교육과정 "[수학II] (1) 함수의 극한과 연속 $\boxed{1}$ 함수의 극한"에 해당하는 제시문이다. 극한의 뜻을 서술하였다.
· 제시문 [라]는 2015 개정 교육과정 "[수학II] (2) 미분 $\boxed{3}$ 도함수의 활용"에 해당하는 제시문이다. 함수의 증가, 감소의 뜻을 서술하였다.
· 제시문 [마]는 2015 개정 교육과정 "[수학II] (1) 함수의 극한과 연속 $\boxed{2}$ 함수의 연속"에 해당하는 제시문이다. 사잇값의 정리를 서술하였다.

[문항 해설]

· 문제 1. 및 문제 2. 제시문 [가]를 이용하여 접선의 방정식을 구하고, 직선과 원의 접선에 대한 기본적인 성질 및 제시문 [나]의 삼각함수의 덧셈정리를 활용하여 원의 반지름을 구할 수 있는지 평가한다. 2015 개정 교육과정 "[수학II] (2) 미분 $\boxed{3}$ 도함수의 활용"에서 "접선의 방정식을 구할 수 있다."라고 명시하고 있다. 또한, 2015 개정 교육과정 "[미적분] (2) 미분법 $\boxed{1}$ 여러 가지 함수의 미분"에서 "삼각함수의 덧셈정리를 이해한다."라고 명시하고 있다.

· 문제 3. 제시문 [다]에서 주어진 극한의 뜻을 이해하고, 문제에서 주어진 함수의 극한을 구할 수 있는지 평가한다. 2015 개정 교육과정 "[수학II] (1) 함수의 극한과 연속 $\boxed{1}$ 함수의 극한"에서 "함수의 극한의 뜻을 안다.", "함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다."라고 명시하고 있다.

· 문제 4. 제시문 [라]에서 주어진 함수의 증가, 감소의 정의로부터 함수 $f(x)$가 정의역에서 감소함수인 것을 확인하고, 제시문 [마]에 주어진 사잇값의 정리를 활용하여 함수 $f(x)$의 치역을 구할 수 있는지 평가한다. 2015 개정 교육과정 "[수학II] (2) 미분 $\boxed{3}$ 도함수의 활용"에서 "함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다."라고 명시하고 있다. 또한, 2015 개정 교육과정 "[수학II] (1) 함수의 극한과 연속 $\boxed{2}$ 함수의 연속"에서 "연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다."라고 명시하고 있다.

3. 채점기준 및 유의사항

[채점기준]

· 문항당 2점(총점 8점)으로 하며 세부 점수는 다음과 같다.

· 문제 1. 접선의 방정식을 구하면 0.5점, 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 $\tan\frac{\theta}{2}$의 값을 구하면 0.5점, 원의 접선에 대한 성질과 $\tan\frac{\theta}{2}$의 값으로부터 원의 반지름을 구하면 1점을 부여한다.

· 문제 2. 접선의 방정식과 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 $\tan\frac{\alpha}{2}$의 값을 구하면 1점, 원의 접선에 대한 성질과 $\tan\frac{\alpha}{2}$의 값으로부터 원의 반지름을 구하면 1점을 부여한다.

· 문제 3. $\lim\limits_{x\to0+} f(x)$를 구하면 1점, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$를 구하면 1점을 부여한다.

· 문제 4. 함수 $f(x)$가 감소하는 것을 보이면 1점, 사잇값의 정리를 이용하여 치역을 구하면 1점을 부여한다.

[유의사항]

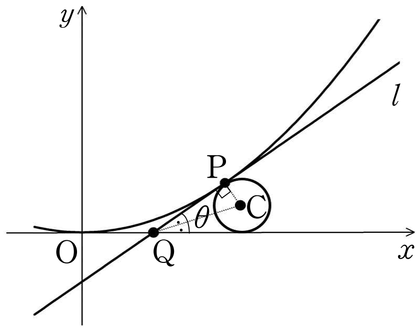
· 문제 3의 풀이에서 엄밀한 계산과정이 없이 극한값만 적으면 0점 처리한다.

· 문제 4의 풀이에서 엄밀한 설명이 없이 함수 $f(x)$가 감소한다고 하면 1점 감점한다.

· 문제 4의 풀이에서 함수 $f(x)$가 감소하는 것을 보인 후, 사잇값의 정리를 이용한 엄밀한 설명이 없이 함수 $f(x)$의 치역만 구하면 1점 감점한다.

4. 예시답안

【1-1】 접선 l 이 x축과 만나는 점을 Q, x축의 양의 방향과 이루는 각을 θ라 하고, 원의 중심을 C라 하자. 그러면 구하는 원의 반지름은 $\overline{\mathrm{PC}}$가 된다. 제시문 **[가]**에 의해 접선 l 의 방정식은 $y=2ax-a^2$ 이므로 점 Q는 $\left(\frac{a}{2},\,0\right)$이고 $\tan\theta=2a$ 가 된다.

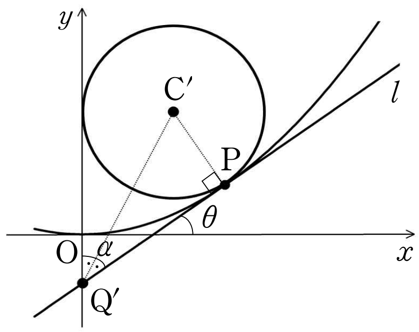


원과 접선의 기본 성질로부터 $\Delta\mathrm{QPC}$는 직각삼각형이고 $\angle\mathrm{PQC}=\frac{\theta}{2}$ 임을 알 수 있다. 제시문 **[나]**에 의해 $2a=\tan\theta=\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$이므로 $a\tan^2\frac{\theta}{2}+\tan\frac{\theta}{2}-a=0$ 이 된다.

$0<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{4}$이므로 $\tan\frac{\theta}{2}=\dfrac{-1+\sqrt{1+4a^2}}{2a}$이다.

따라서 $\tan\frac{\theta}{2}=\dfrac{\overline{\mathrm{PC}}}{\overline{\mathrm{PQ}}}$이고 $\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{a}{2}\sqrt{1+4a^2}$이므로, 원의 반지름은 $\overline{\mathrm{PC}}=\dfrac{1+4a^2-\sqrt{1+4a^2}}{4}$이다.

【1-2】 접선 l 이 y축과 만나는 점을 Q′, y축의 양의 방향과 이루는 각을 α라 하고, 원의 중심을 C′라 하자. 그러면 구하는 원의 반지름은 $\overline{\mathrm{PC'}}$가 된다. 접선 l 의 방정식은 $y=2ax-a^2$ 이므로 점 Q′는 $(0,\,-a^2)$이고 $\tan\alpha=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\dfrac{1}{2a}$ 가 된다.



원과 접선의 기본 성질로부터 $\Delta \mathrm{Q'PC'}$는 직각삼각형이고 $\angle \mathrm{PQ'C'} = \dfrac{\alpha}{2}$ 임을 알 수 있다.

제시문 **[나]**에 의해 $\dfrac{1}{2a} = \tan\alpha = \dfrac{2\tan\dfrac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}$ 이므로 $\tan^2\dfrac{\alpha}{2} + 4a\tan\dfrac{\alpha}{2} - 1 = 0$ 가 된다.

$0 < \dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{\pi}{4}$ 이므로 $\tan\dfrac{\alpha}{2} = -2a + \sqrt{1+4a^2}$ 이다. 따라서 $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\overline{\mathrm{PC'}}}{\overline{\mathrm{PQ'}}}$ 이고

$\overline{\mathrm{PQ'}} = a\sqrt{1+4a^2}$ 이므로, 원의 반지름은 $\overline{\mathrm{PC'}} = a(1+4a^2) - 2a^2\sqrt{1+4a^2}$ 이다.

【1-3】 $f(x) = \dfrac{4x\left[x(1+4x^2) - 2x^2\sqrt{1+4x^2}\right]}{1+4x^2-\sqrt{1+4x^2}} = \dfrac{4x^2\left(\sqrt{1+4x^2}-2x\right)}{\sqrt{1+4x^2}-1}$ 이므로 분자, 분모에 $\left(\sqrt{1+4x^2}+2x\right)\left(\sqrt{1+4x^2}+1\right)$를 각각 곱하면,

$f(x) = \dfrac{\sqrt{1+4x^2}+1}{\sqrt{1+4x^2}+2x} = \dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+4}+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+4}+2}$ $(x>0)$ 이다. 따라서 제시문 **[다]**에 의해

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$ 이다.

【1-4】 $\sqrt{1+4x^2}+1 = t\ (x>0)$ 라 두면 $x = \dfrac{\sqrt{t^2-2t}}{2}$ $(t>2)$이다. $F(t) = f\left(\dfrac{\sqrt{t^2-2t}}{2}\right)$ 라 두면,

$$F(t)=f\left(\frac{\sqrt{t^2-2t}}{2}\right)=\frac{t}{t-1+\sqrt{t^2-2t}}=\frac{1}{1-\frac{1}{t}+\sqrt{1-\frac{2}{t}}}\quad (t>2)$$

가 된다. 제시문 **[라]**에 의해, t에 관한 함수 $1-\frac{1}{t}$와 $1-\frac{2}{t}$는 $t>2$인 구간에서 증가하고, 함수 $F(t)$는 이 구간에서 감소한다. x에 관한 함수 $\sqrt{1+4x^2}+1$는 $x>0$인 구간에서 증가하므로, 함수 $f(x)=F(\sqrt{1+4x^2}+1)$는 정의역인 $x>0$인 구간에서 감소한다.

함수 $f(x)$가 감소하므로, 임의의 $x_0>0$에 대하여 $2=\lim_{x\to 0+} f(x)>f(x_0)>\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{1}{2}$가 되어 함수 $f(x)$의 치역은 열린구간 $\left(\frac{1}{2},\,2\right)$의 부분집합이 된다. 극한의 정의로부터 $\frac{1}{2}<k<2$인 임의의 값 k에 대하여 $\frac{1}{2}<f(b)<k<f(a)<2$가 되는 $0<a<b$가 존재함을 알 수 있다. 함수 $f(x)=\frac{\sqrt{1+4x^2}+1}{\sqrt{1+4x^2}+2x}$는 닫힌구간 $[a,\,b]$에서 연속이므로 제시문 **[마]**의 사잇값의 정리에 의해 $f(c)=k$가 되는 c가 a와 b사이에 존재한다. 따라서 함수 $f(x)$의 치역은 열린구간 $\left(\frac{1}{2},\,2\right)$가 된다.