

2023학년도 서강대학교  
**모의논술 자료집 2차**  
- 자연계열 -

서강대학교 입학처

# 목 차

<input type="checkbox"/> 문제 및 제시문	.....	1
<input type="checkbox"/> 출제의도 및 채점기준	.....	3

■ 유의사항

1. 시험시간은 50분입니다.

## 제시문

### [가] 독립

두 사건  $A, B$ 에 대하여 한 사건이 일어나는 것이 다른 사건이 일어날 확률에 아무런 영향을 주지 않을 때, 즉  $P(B|A) = P(B)$ 일 때, 두 사건  $A, B$ 는 서로 독립이라 한다.

### [나] 이항분포

1회의 시행에서 사건  $A$ 가 일어날 확률이  $p$ 일 때,  $n$ 회의 독립시행에서 사건  $A$ 가 일어나는 횟수를 확률변수  $X$ 라 하자. 확률변수  $X$ 가 가지는 값은  $0, 1, \dots, n$  이며, 그 확률질량함수는  $x = 0$  일 때,  $P(X = 0) = (1 - p)^n$ ,  
 $x = 1, \dots, n - 1$ 일 때,  $P(X = x) = {}_n C_x p^x (1 - p)^{n - x}$   
 $x = n$  일 때,  $P(X = n) = p^n$  이다.

### [다] 기댓값

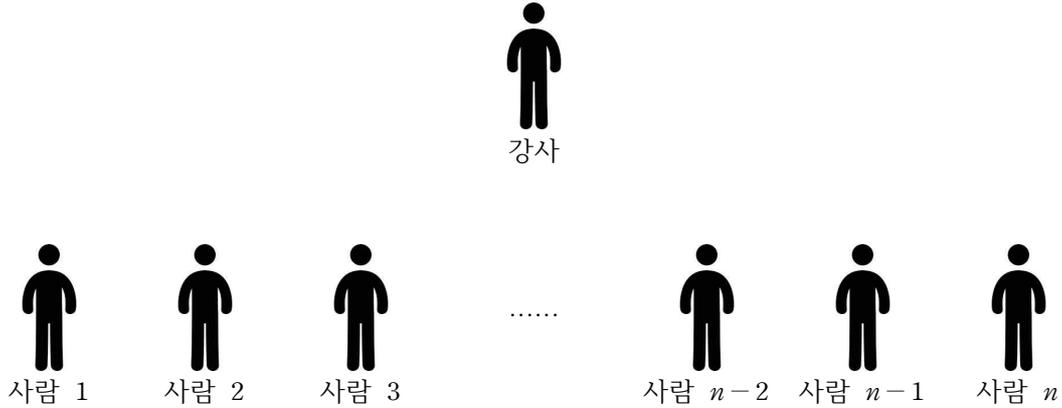
이산확률 변수  $X$ 의 확률분포가 아래 표와 같을 때,

$X$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$	합계
$P(X = x_i)$	$p_1$	$p_2$	...	$p_n$	1

$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$ 을 이산확률변수  $X$ 의 기댓값 또는 평균이라 하고, 이것을 기호로  $E(X)$ 와 같이 나타낸다.

**문제**

제시문 [가]-[다]를 참고하여 다음 물음에 답하시오.



$n$ 명의 사람이 옆으로 일렬로 앉아서 레크리에이션 강사를 보고 있다. ( $n \geq 2$ ) 강사는 사람들을 서로 인사시키기 위해 말한다. "양 옆 사람에게 한 번씩 인사하세요. 제가 하나! 하면 왼쪽 또는 오른쪽으로 인사하고 둘! 하면 처음과 반대쪽으로 인사하세요." 사람들은 왼쪽 또는 오른쪽 중 임의의 방향으로 인사를 시작한다. 이 때, 양 끝의 두 사람(사람 1과 사람  $n$ )은 사람이 있는 한쪽 방향으로만 인사를 두 번 반복한다.

인접한 두 사람이 마주보고 인사를 하게 되면 '인사가 성공했다'라고 인사에 성공한 쌍이라 한다. 예를 들어,  $n=3$ 일 때 인사를 하는 방법은 아래와 같이 두 가지 경우가 있고, 각각의 경우 인사에 성공한 쌍의 수는 2이다.

	하나!	둘!	인사에 성공한 쌍의 수
경우 1	<u>R L</u> L	R <u>R L</u>	2
경우 2	R <u>R L</u>	<u>R L</u> L	2

(R은 오른쪽으로 인사를, L은 왼쪽으로 인사를 나타내고, 인접한 두 사람이 R L로 표시될 때 두 사람은 인사가 성공하는 쌍이 된다.)

【1-1】.  $n = 4$ 일 때, 인사에 성공한 쌍의 수의 기댓값을 구하시오.

【1-2】.  $n \geq 3$ 일 때, 인사에 성공한 쌍의 수의 기댓값을 구하시오.

【1-3】. 모든 쌍이 인사에 성공할 확률을 구하시오.

【1-4】.  $n \geq 4$ 일 때, 인사에 성공한 쌍의 수의 최댓값  $m$ 과 인사에 성공한 쌍의 수가  $k$ 일 확률을 구하시오. (단,  $2 \leq k \leq m$ )

## □ 출제의도 및 채점기준

### 1. 출제의도

- 확률의 독립사건을 이해하고, 이를 활용할 수 있는지 평가
- 이항분포를 이해하고, 이를 활용할 수 있는지 평가
- 기댓값을 이해하고 이를 활용할 수 있는지 평가

### 2. 채점기준 및 유의사항

#### [채점기준]

- 총점 8점으로 하며 세부 점수는 다음과 같다.

문제 1. 인사할 때 생기는 4가지 경우의 수에 대해, 각각 인사에 성공한 쌍의 수를 정확히 기술하면 0.5점씩 총 2점을 부여한다.

문제 2.  $i$ 번째 인사 쌍과  $i+1$  번째 인사 쌍으로 나누어서 총 4가지 경우로 구분하면 1점, 각각의 경우에 대해서 실패 또는 1회 성공을 맞추면 0.5점씩 부여하여, 총 3점을 부여한다.

문제 3.  $n-3$ 개의 인사 쌍에 대해서 인사 성공 여부가 독립사건임을 적용하여  $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$  을 구하면 1점을 부여한다.

문제 4. 인사에 성공한 쌍의 수의 최댓값  $m=n-1$ 을 구하면 0.5점,  $2 \leq k \leq m$ 인  $k$ 에 대하여 이항정리를 이용하여 답을 도출하면 1.5점을 부여하여, 총 2점을 부여한다.

### 3. 예시답안

【1-1】  $n=4$ 일 인사를 하는 방법은 4가지 경우가 있고, 각각의 경우 인사에 성공한 쌍의 수는 다음과 같다.

	하나!	둘!	인사에 성공한 쌍의 수
경우 1	<u>R L</u> L L	R R <u>R L</u>	2
경우 2	<u>R L R L</u>	R R <u>L L</u>	3
경우 3	R <u>R L</u> L	<u>R L R L</u>	3
경우 4	R R <u>R L</u>	<u>R L L L</u>	2

따라서 인사에 성공한 쌍의 수의 기댓값은  $\frac{2+3+3+2}{4} = \frac{5}{2}$  이다.

【1-2】  $n \geq 3$  인 일반적인 경우에 인접한 두 사람이 인사에 성공하는 경우는 인접한 두 사람의 ‘하나!’에서의 인사 방향이 서로 반대인 경우(R L 또는 L R)이다.  $n$ 명의 사람일 때 총  $n-1$ 개의 “인사 쌍”이 있다. 1번째와  $n-1$ 번째의 인사 쌍에서는 항상 1회 인사가 성공한다. 2번째부터  $n-2$ 번째 까지 인사 쌍에서의 인사 성공 여부를 조사하면 다음과 같다.

$(i = 2, \dots, n-2)$ )	하나!		둘!		$i$ 번째 인사 쌍에서 인사 성공여부
	사람 $i$	사람 $i+1$	사람 $i$	사람 $i+1$	
경우 1	R	R	L	L	실패
경우 2	<b>R</b>	<b>L</b>	L	R	1회 성공
경우 3	L	R	<b>R</b>	<b>L</b>	1회 성공
경우 4	L	L	R	R	실패

따라서  $i$ 번째 인사 쌍에서는 인사가 실패하거나 1회 성공하고, 성공할 확률은  $\frac{1}{2}$ 이다. 따라서

인사에 성공한 쌍의 개수의 기댓값은  $2 + \sum_{i=2}^{n-2} 1 \cdot \frac{1}{2} = 2 + \frac{n-3}{2} = \frac{n+1}{2}$ 이다.

【1-3】 모든 사람이 서로 인사하려면 모든 인사 쌍에서 인사가 성공해야 한다. 각각의 인사 쌍에서 인사에 성공하는 사건은 독립이므로, 각각의 인사 쌍에서 인사에 성공할 확률을 모두 곱하면  $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$ 이다.

【1-4】 모든 인사 쌍에서 인사가 성공하면 인사에 성공한 쌍의 수가 최대가 되므로  $m = n-1$ 이다. 1번째와  $n-1$ 번째 인사 쌍에서 인사는 항상 성공하므로, 2번째부터  $n-2$ 번째 인사 쌍에서  $k-2$ 번 인사가 성공하면 된다. 각각의 인사 쌍에서 인사가 성공할 확률이  $\frac{1}{2}$ 로 동일하므로 이항분포를 따른다. 따라서 제시문 나에 의해 2번째부터  $n-2$ 번째 인사 쌍에서  $k-2$ 번 인사가 성공할 확률은  ${}_{n-3}C_{k-2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$ 이다.