2024학년도 서강대학교
모의논술 자료집 1차
- 자연계열 -

서강대학교 입학처

목 차

■ 유의사항
1. 시험시간은 50분입니다.

제시문

[가] 한 기차 회사가 A역과 B역을 오가는 열차를 운영하고자 한다. 이 회사는 하루에 총 2번의 열차 운행을 계획하고 있다. 그리고 역의 수와 운행 열차의 수를 확장하고자 한다. 각 역마다 다량의 열차가 항상 대기하고 있으며 출발 시각 순서대로 표를 만들려고 한다.

[나] 실수에서 정의된 함수 f에 대해 적당한 L이 존재하여 모든 실수 x가 $f(x+L)=f(x)$을 만족할 때 함수 f는 주기 L을 갖는 주기함수라고 한다. 다음처럼 정의된 함수 $f(x)$는 주기함수로서 실수 집합 전체로 확장 정의되어 있다:

$$f(x)=\begin{cases} 2/3 \, (0 \le x < 1/3) \\ 1 \quad (1/3 \le x < 2/3). \\ 4/3 \, (2/3 \le x < 1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$를 n번 합성한 함수를 $f^{(n)}(x)$라고 정의 한다.

문제

제시문 [가]를 참조하여 문제 [1-1]과 [1-2]에 답하시오.

【1-1】 한 기차 회사가 A역과 B역을 오가는 열차를 운영하고자 한다. 이 회사는 하루에 총 2번의 열차 운행을 계획하고 있다. 각 열차는 A역 또는 B역을 출발하여 다른 역에 도착한다. 이 회사는 A역에서 출발하는 열차와 B역에서 출발하는 열차의 출발시각표를 만들려고 한다. 각 역마다 다량의 열차가 대기하고 있으며, 출발 시각 순서로 표를 만들려고 한다. 하루에 2번의 열차 운행을 할 때 가능한 모든 시각표의 경우의 수를 구하시오.

【1-2】 한 기차 회사가 A역, B역, C역 운행을 목표로 한다. A역과 C역 사이에 B역이 있으며, 하루에 총 3번의 열차 운행을 계획하고 있다. 각 열차는 A역 또는 B역 또는 C역을 출발하여 다른 역에 도착한다. A역에서 출발하면 B역에 도착해야하고 C역에서 출발하면 B역에 도착해야 한다. 그리고 B역에서 출발하면 A역 또는 C역에 도착해야 하다. 이 회사는 A역에서 출발하는 열차와 B역에서 출발하는 열차 그리고 C역에서 출발하는 열차의 출발시각표를 만들려고 한다. 각 역마다 다량의 열차가 대기하고 있으며, 출발 시각 순서로 표를 만들려고 한다. 하루에 3번의 열차 운행을 할 때 가능한 모든 시각표의 경우의 수를 구하시오.

제시문 [나]를 참조하여 문제 [1-3]과 [1-4]에 답하시오.

【1-3】 정의된 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $f(x)$를 n번 합성한 함수를 $f^{(n)}(x)$라고 하면 $f^{(n)}(x)$은 주기 1인 주기함수임을 보이고 $f^{(n)}(1/2)=1$을 만족하는 모든 n을 찾으시오.

【1-4】 정의된 함수 $f(x)$에 대하여

$$a_{3n+1}=\int_{n+1/3}^{n+2/3}(n+1)f^{(3n+1)}(x)(x-n)^n dx$$

이라 할 때, $\sum_{n=0}^{\infty}a_{3n+1}$을 계산하시오.

▢ 출제의도 및 채점기준

1. 출제의도

· 본교 자연계열의 교과목들과 융복합 교과인 기계학습의 수리적 기초 이론을 수학 가능한지 추정하는 것을 주목표로 하며, 아울러 문장으로 쓰여진 논리적 지문을 해석하고 이해하는 능력도 시험한다. 먼저 고등학교 수학 교과과정에 나타나는 개념의 정확한 이해 여부와 각 단원들 간의 융합적 복합 문제를 해결할 수 있는 능력을 시험한다.
· 둘째 교과과정을 통해 배운 수학적 지식을 현실의 문제에 적용 후 수리적 모형화하고 정해진 시간 내에 문제 해결 가능한 능력을 가지고 있는가를 시험하는 것을 목표로 출제한다.

2. 문항해설

[제시문 해설]

· 제시문 [가]는 [고등수학(하)]의 3.경우의 수에서 순열과 조합의 이론적 개념을 응용하기 위한 것으로 서술문에 열차의 출발 시각표에 대한 기본 요소들을 서술하고 있다.
· 제시문 [나]는 [고등수학(하)]의 2.함수의 합성함수와 합성함수의 성질, [고등수학1]의 4.수열, [고등수학2]의 1.함수의 극한과 연속, 3.적분을 응용하기 위하여 주기함수의 정의를 서술하여 문항의 이해를 돕고자 하였다.

[문항 해설]

· 문제 1. 기차 출발시각표 구성에 있어서 가장 중요한 것은 출발시각의 “표”를 구성하는 방법의 수이므로 순열이라는 것을 이해하여야 함
순열과 조합이 동시에 고려되는 문제이므로 정확한 개념의 차이를 이해하고 있어야 함

· 문제 2. 1번 문항의 단순한 문제를 일반적인 경우로 확장하여도 문제해결이 가능한 모형설정이 되어야 함
보다 복잡한 경우의 가능성을 누락 없이 고려할 수 있고 계산하여야 함

· 문제 3. 주기함수의 개념을 명확히 알고 있어야 함
연속함수와 불연속함수의 개념을 이해하고 이로부터 합성함수를 구체적으로 계산하고 그 값을 찾을 수 있어야 함
합성함수 값의 특징(주기성)을 발견하고 불연속인 점들을 수학적으로 표현할 수 있어야 함

· 문제 4. 합성함수의 정적분을 정확히 계산할 수 있어야 함
적분값을 계산할 때, 주기함수의 합성에 따른 특징을 파악하고 활용하여 계산의 효율과 정확성을 높여야 함
얻어진 수열의 수열이 등비급수라는 것을 파악하고 이들의 합과 연산을 할 수 있어야 함.

3. 채점기준 및 유의사항

[채점기준]

• 문제 [1-1]
  · 출발시각표를 순열이라는 것을 이해하면 1점을 부여한다.
  · 경우의 수를 정확히 찾으면 1점을 부여한다.
• 문제 [1-2]
  · 가능한 출발시각표를 구성만 한 경우는 0.5점을 부여한다.
  · 순열의 계산에서 가능한 경우의 수를 모두 고려한 경우 1점을 부여한다.
  · 모든 경우의 수를 합하여 결과를 도출해 내면 0.5점을 부여한다.
• 문제 [1-3]
  · 주기함수의 증명이 있으면 1점을 부여한다.
  · $f^{(n)}(1/2)=1$ 정확히 찾으면 1점을 부여한다.
• 문제 [1-4]
  · 적분값의 일반항을 구하면 1점을 부여한다.
  · 일반항의 등비수열을 정확히 연산해 내면 1점을 부여한다.

[유의사항]

• 문제 [1-1], [1-2]
  · 출발시각표를 순열이라는 것을 이해하지 못하는 경우 0점 처리함
  · 문제 [1−2]에서 방법이 모두 맞는데 경우의 수를 합산하는 과정에서 누락한 경우 부분 점수 1점을 감점 함

• 문제 [1-3]
  · 계산과정이 모두 맞는데 단순 산술적인 연산 오류인 경우 1점을 감점함

4. 예시답안

【1-1】 주어진 조건에서 하루에 총 2번의 열차 운행을 하고, 열차는 A역과 B역을 오가며 반드시 B역을 거쳐서 도착해야 한다고 가정한다. 이때, A역에서 출발하는 열차의 횟수를 k번으로 정하면, B역에서 출발하는 열차의 횟수는 $(2-k)$번이 된다.

우리는 0부터 2까지의 정수 k에 대해 A역에서 출발하는 열차가 k번, B역에서 출발하는 열차가 $(2-k)$번인 출발표를 구하면 된다. 가능한 모든 경우를 나열해보면 다음과 같다.

1. A역에서 출발하는 열차 0번, B역에서 출발하는 열차 2번인 시각표: BB
2. A역에서 출발하는 열차 1번, B역에서 출발하는 열차 1번인 시각표:
   AB (A에서 먼저 출발 후, B출발), BA (B에서 먼저 출발 후, A출발)
3. A역에서 출발하는 열차 2번, B역에서 출발하는 열차 0번인 시각표: AA

따라서 가능한 모든 출발시각표는 1+2+1=4가지가 된다.

【1-2】 A역에서 출발하는 열차의 횟수를 k번, B역에서 출발하는 열차의 횟수를 ℓ번, C역에서 출발하는 열차의 횟수를 m번으로 정하면, 다음 조건을 만족해야 한다.

1. A역에서 출발하는 열차: k번, 도착: B역
2. B역에서 출발하는 열차: ℓ번, 도착: A역 또는 C역
3. C역에서 출발하는 열차: m번, 도착: B역

이때, 우리는 3번의 열차 운행 중에서 각 역에서 출발하는 열차의 횟수를 선택할 수 있다. 즉, 가능한 모든 경우를 구하기 위해서는 0부터 3까지의 정수 k, ℓ, m에 대해 위의 조건을 만족하는 값을 찾으면 된다. 가능한 모든 경우를 나열해보면 다음과 같다. B역을 출발하는 경우는 도착역이 A역 또는 C역이 가능하므로 각각 B(A), B(C)로 표기한다.

1. A역에서 출발하는 열차 0번, B역에서 출발하는 열차 1번, C역에서 출발하는 열차 2번인 시각표:
   B(A)CC의 순열 3가지, B(C)CC의 순열 3가지
2. A역에서 출발하는 열차 0번, B역에서 출발하는 열차 2번, C역에서 출발하는 열차 1번인 시각표:
   B(A)B(A)C의 순열 3가지, B(C)B(C)C의 순열 3가지, B(A)B(C)C의 순열 6가지
3. A역에서 출발하는 열차 1번, B역에서 출발하는 열차 0번, C역에서 출발하는 열차 2번인 시각표:
   ACC의 순열 3가지
4. A역에서 출발하는 열차 1번, B역에서 출발하는 열차 2번, C역에서 출발하는 열차 0번인 시각표:
   AB(A)B(A)의 순열 3가지, AB(C)B(C)의 순열 3가지, AB(A)B(C)의 순열 6가지

5. A역에서 출발하는 열차 2번, B역에서 출발하는 열차 0번, C역에서 출발하는 열차 1번인 시각표:
   AAC의 순열 3가지
6. A역에서 출발하는 열차 2번, B역에서 출발하는 열차 1번, C역에서 출발하는 열차 0번인 시각표:
   AAB(A)의 순열 3가지, AAB(C)의 순열 3가지
7. A역에서 출발하는 열차 3번 출발하는 경우: AAA의 순열 1가지
8. B역에서 출발하는 열차 3번 출발하는 경우:
   B(A)B(A)B(A)의 순열 1가지, B(A)B(A)B(C)의 순열 3가지, B(A)B(C)B(C)의 순열 3가지, B(C)B(C)B(C)의 순열 1가지
9. C역에서 출발하는 열차 3번 출발하는 경우: CCC의 순열 1가지
10. 각 역에서 한 번씩 출발하는 경우: A, B(A), B(C), C에서 각각 출발하므로
    AB(A)C의 순열 6가지, AB(C)C의 순열 6가지

따라서 가능한 모든 시각표는
총 (3+3)+(3+3+6)+3+(3+3+6)+3+(3+3)+1+(1+3+3+1)+1+(6+6)=64가지이다.

【1-3】 실수 x에 대해 $f^{(n)}(x+1)=f^{(n)}(x)$ 을 보이면 된다. 그런데 정의에 의해 $f(x+1)=f(x)$이므로 $f^{(n)}(x+1)=f^{(n-1)}(f(x+1))=f^{(n-1)}(f(x))=f^{(n)}(x)$이다. 따라서 $f^{(n)}(x)$는 주기 1인 함수이다.

	$0 \le x < 1/3$	$1/3 \le x < 2/3$	$2/3 \le x < 1$
$f(x)$	2/3	1	4/3
$f^{(2)}(x)$	4/3	2/3	1
$f^{(3)}(x)$	1	4/3	2/3
$f^{(4)}(x)$	2/3	1	4/3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

따라서 $f^{(n)}(1/2)=1$이 되는 자연수 n은 $1, 4, 7, 10, \ldots$ 이다. 즉 3로 나눈 나머지가 1인 자연수 즉, $3m+1$ 여기서 m은 $0, 1, 2, 3, \ldots$.

【1-4】 자연수 n에 대하여 구간 $[n+1/3,\, n+2/3]$에서 $f^{(2n+1)}(x)$는 항상 1이다. 따라서

$$\begin{aligned} a_{3n+1} &= \int_{n+1/3}^{n+2/3} (n+1) f^{(3n+1)}(x)(x-n)^n dx \\ &= (2/3)^{n+1} - (1/3)^{n+1} \end{aligned}$$

이다. 그러므로

$$\begin{aligned} a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n+1} + \cdots &= \sum_{n=0}^{\infty} 2/3^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} (1/3)^{n+1} \\ &= \frac{2/3}{1-2/3} - \frac{1/3}{1-1/3} \\ &= 2 - 1/2 \\ &= 3/2. \end{aligned}$$