2024학년도 서강대학교
모의논술 자료집 2차
- 자연계열 -

서강대학교 입학처

목 차

▢ **문제 및 제시문** 1

▢ **출제의도 및 채점기준** 3

■ **유의사항**
1. 시험시간은 50분입니다.

제시문

[가] 함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 미분가능할 때 그 구간의 모든 x에 대하여 $f'(x)>0$ 이면 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다. 그리고 그 구간의 모든 x에 대하여 $f'(x)<0$ 이면 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다.

[나] 다음은 기본적인 삼각함수들의 미분공식을 나타낸다.

$$\sin' x = \cos x,\ \cos' x = -\sin x,\ \tan' x = \sec^2 x,\ \cot' x = -\csc^2 x$$

[다] 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$일 때, A, B가 동시에 일어날 확률은 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)$이다.

문제

제시문을 참고하여 다음 물음에 답하시오.

【1-1】 함수 $y=a\log_3(x-1)+b\log_5(5-x)$의 최댓값이 $x=3$에서 1이다 이때, a와 b를 구하시오.

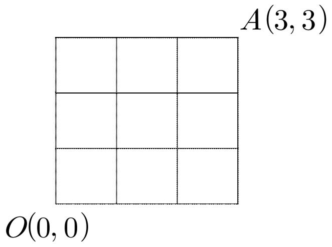
【1-2】 두 곡선 $y=a\sin x$와 $y=\cos x$ 및 $x=0$과 $x=\dfrac{\pi}{2}$로 둘러싸인 도형에서 $a\sin x\ge\cos x$인 부분의 넓이가 0과 크거나 같고 10과 작거나 같을 때, 자연수 상수 a를 모두 구하시오. (단, $a\ge 1$)

【1-3】 점 $(a,0)$을 지나는 직선이 곡선 $y=(10x-1)e^x$와 접한다고 가정한다. 서로 다른 두 개의 접선이 존재하지 않는 정수 a를 모두 구하시오.

다음을 읽고 문항【4】에 답하시오.

원점 O로 하는 일사분면에 표시된 정수격자 도로망이 있다. 크기는 가로와 세로의 그물 개수가 각각 3이다. 동전을 던져 말을 움직는 말놀이를 규칙을 정하려고 한다. 점 $O(0,0)$에서 검정말이 점 $A(3,3)$에서 흰말이 출발한다. 온전한 동전을 번갈아 던져 앞면이 나오면 검정말은 위로, 흰말은 아래로 움직인다. 뒷면이 나오면 검정말은

오른쪽으로, 흰말은 왼쪽으로 움직인다. 검정말이 먼저 움직이는 것으로 시작한다. 도로망의 위 또는 아래에 도착한 말은 동전의 앞면이 나오는 경우에 각각 말은 움직이지 않는다.



【1-4】 검정말과 흰말이 만나게 될 때의 확률을 계산하시오.

▢ 출제의도 및 채점기준

1. 출제의도

· 지수, 로그함수의 증감과 미분에 대한 성질을 이해하고 최댓값을 찾는 능력을 평가함
· 함수의 정적분에 대한 기본 성질을 이해하고 삼각함수의 정적분값을 계산하는 능력을 평가함
· 확률의 합과 곱에 대한 이해와 응용문제 해결능력을 평가함

2. 채점기준 및 유의사항

[채점기준]

문제【1-1】
· 로그함수의 미분을 통해 두 개의 방정식을 유도하면 1점
· 두 값을 정확히 찾으면 1점

문제【1-2】
· 두 삼각함수의 교점을 구하고 적분결과를 유도하면 1점
· 치환을 이용하여 적분값을 정확히 계산하면 1점

문제【1-3】
· 접선의 함수를 정확히 구하면 1점
· 판별식을 이용하여 조건의 영역을 찾으면 1점

문제【1-4】
· 만나는 교점 4개를 구하면 1점
· 각 교점에서 만날 확률을 모두 더하여 정확한 값을 얻으면 1점

3. 예시답안

<u>예시답안</u>

【1-1】로그함수의 정의로부터 $f(x)=a\log_3(x-1)+b\log_5(5-x)$는 구간 $1<x<5$에서 정의 되고 최댓값을 갖기 위해서는 위로 볼록한 그래프이다. 따라서 $a>0$, $b>0$이어야 한다. f는 미분가능하므로 도함수를 이용한 최댓값-최솟값을 계산하고자 한다. $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$이므로

$$f'(x)=\frac{a}{(x-1)\ln 3}-\frac{b}{(5-x)\ln 5}$$

$$=\frac{\alpha(5-x)-\beta(x-1)}{(x-1)(5-x)\ln 3\ln 5}.$$

(단. $\alpha=a\ln 5$, $\beta=b\ln 3$) 임계값을 구하기 위해 $f'(x)=0$을 풀면 $\alpha(5-x)-\beta(x-1)=0$이고 주어진 조건으로부터 $x=\dfrac{5\alpha+\beta}{\alpha+\beta}=3$에서 $1=f(3)=a\log_3 2+b\log_5 2$이므로 두 식을 풀

면 $\alpha=\beta$, 즉, $a=b\dfrac{\ln 3}{\ln 5}=b\log_5 3$ 그리고 $b\log_5 3\log_3 2+b\log_5 2=1$. 따라서

$$b=\frac{1}{\log_5 3\log_3 2+\log_5 2}=\log_4 5,\ a=\frac{\log_5 3}{\log_5 3\log_3 2+\log_5 2}=\log_4 3.$$

【1-2】 구간 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$에서 $a\sin x$와 $\cos x$가 만나는 x축의 값은 $\tan^{-1}\dfrac{1}{a}$. 그러므로 면적은

$$\int_{\tan^{-1}\frac{1}{a}}^{\frac{\pi}{2}} a\sin x-\cos x\,dx=a\cos\left(\tan^{-1}\frac{1}{a}\right)-\left(1-\sin\left(\tan^{-1}\frac{1}{a}\right)\right).$$

$\tan\theta_a=\dfrac{1}{a}$라 두면,

$\sin\theta_a=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$, $\cos\theta_a=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}$ 이므로 적분값은 $\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}-1$이다.

그런데 이 값은 폐구간 $[0,10]$ 안에 있어야 하므로 $1\le\sqrt{a^2+1}\le 11$ $(1\le a^2+1\le 121)$.
따라서 가능한 자연수 a는 $1, 2, 3, \ldots, 10$.

【1-3】 실수 t에 대하여 점 $(t,(10t-1)e^t)$에서 접선은 직선은 $y=(10e^t+(10t-1)e^t)(x-t)+(10t-1)e^t$이다. 이 직선은 $(a,0)$을 지나므로 $0=(10e^t+(10t-1)e^t)(a-t)+(10t-1)e^t$을 만족한다. $e^t>0$이므로 정리하면 $10t^2-(10a+1)t-9a+1=0$이다. 모든 t에 대해서 서로 다른 두 접선이 존재하지 않기 위한 조건은 판별식 $D=(10a+1)^2+4\cdot 10\cdot(9a-1)\le 0$ (즉 $100a^2+380a-39\le 0$).

$$a=\frac{-190\pm\sqrt{190^2+100\cdot 39}}{100}\approx -3.9,\ 0.1$$

따라서 만족하는 정수 a는 $-3,\ -2,\ -1,\ 0$

【1-4】 두 말이 만날 수 있는 점은 $(0,3)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(3,0)$이다. 각 점에서 두 말이 만날 수 있는 확률을 계산하여 더하면 된다.

곱의 법칙을 적용하면 $(0,3)$에서 만날 확률은 $\dfrac{1}{2^3}\cdot\dfrac{1}{2^3}$, $(1,2)$에서 만날 확률은 $\dfrac{3}{2^3}\cdot\dfrac{3}{2^3}$, $(2,1)$에서 만날 확률은 $\dfrac{3}{2^3}\cdot\dfrac{3}{2^3}$, $(3,0)$에서 만날 확률은 $\dfrac{1}{2^3}\cdot\dfrac{1}{2^3}$이다.

합의 법칙을 적용하면 $\dfrac{20}{2^6}=\dfrac{5}{2^4}$.