2025학년도 서강대학교
모의논술 자료집 1차
- 자연계열 -

서강대학교 입학처

목 차

■ 유의사항
1. 시험시간은 50분입니다.

제시문

[가] 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같은 사항을 조사하여 그릴 수 있다

① 함수의 정의역과 치역
② 곡선과 좌표축의 교점
③ 곡선의 대칭성과 주기
④ 함수의 증가와 감소
⑤ 곡선의 오목과 볼록, 변곡점
⑥ $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, 점근선

[나] 사인함수와 코사인함수의 덧셈정리

① $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
② $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

[다] 무리수 e

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

문제

【1-1】 함수 $f(x)=2x+\sin 2x$ $(0\le x\le\pi)$의 그래프의 개형을 그리시오.

【1-2】 $\mathrm{A}=\left(\frac{\pi}{2},0\right)$이고, 곡선 $y=\tan x$ $\left(0\le x<\frac{\pi}{2}\right)$ 위의 점 $(t,\tan t)$에서 접하는 접선이 x축과 만나는 점을 B, 직선 $x=\frac{\pi}{2}$와 만나는 점을 C라 하자. 삼각형 ABC의 넓이를 $S(t)$라 할 때, 함수 $S(t)$가 구간 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$에서 최대값과 최솟값을 갖는지 조사하시오.

$A=(a,\,0)$ **이고, 곡선** $y=\tan x$ $(0<x<a)$ **위를 움직이는 점** $C(t,\,\tan t)$**에 대하여** $B=(t,\,0)$**,** $D=(a,\,\tan t)$**라 할 때, 사각형** ABCD**의 넓이의 최댓값을** $g(a)$**라 하자.**

문항 【1-3】과 【1-4】에 답하시오. (단, $0<a<\frac{\pi}{2}$**)**

【1-3】 사각형 ABCD의 넓이가 최대가 되는 t가 유일함을 보이고, $g(a)=\frac{1}{2}$일 때 a의 값을 구하시오.

【1-4】 사각형 ABCD의 넓이가 최대가 되는 t의 값을 t_0라 하자. 곡선 $y=\tan x$ $(0\le x<\frac{\pi}{2})$와 x축 및 직선 $x=t_0$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $h(a)$라 할 때, 극한 $\lim_{a\to 0^+}\frac{h(a)}{g(a)}$을 조사하시오.

▢ 출제의도 및 채점기준

1. 출제의도

· 도함수와 이계도함수를 활용하여 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있는지 평가한다.
· 도함수를 활용하여 함수의 증가와 감소를 판정하고 이를 이용하여 최댓값 및 최솟값을 조사할 수 있는지 평가한다.
· 삼각함수의 성질, 미분법 및 적분법을 잘 이해하고 있는지 평가한다.
· 정적분을 이용하여 도형의 넓이를 구하고 여러 가지 함수의 극한을 구할 수 있는지 평가한다.

2. 문항해설

제시문 [가], [나], [다]는 고등학교 〈미적분〉 교과서에서 그대로 발췌하여 제시하였다. 네 개의 제시문은 모든 교과서에서 공통으로 다루고 있는 정의, 설명으로, 학생들이 문제를 푸는 데 도움을 받을 수 있도록 구성되었다. 문제를 해결할 때 사용된 핵심 용어는 '여러 가지 함수의 미분, 미분법, 도함수의 활용, 정적분, 함수의 극한'으로 이는 교육과정에 모두 부합한다.

· 문항 【1-1】은 제시문 [가]에 주어진 그래프의 개형을 그릴 때 고려할 사항을 바탕으로, 도함수와 이계도함수를 이용하여 그래프의 개형을 잘 그릴 수 있는지 평가하는 문항이다. 도함수의 부호와 함수의 증가・감소의 관계를 이용하여, 삼각함수를 포함한 함수의 그래프 개형을 그리는 방법은 모든 〈미적분〉 교과서에서 공통으로 다루고 있다.

· 문항 【1-2】는 접선의 방정식을 이용하여 삼각형의 넓이를 찾고, 도함수의 부호와 함수의 증가・감소의 관계를 이용하여 함수가 주어진 구간에서 최솟값 및 최댓값을 유무를 판단 할 수 있는지 평가하는 문항이다. 삼각함수의 미분법, 접선의 방정식, 도함수를 활용하여 최솟값 및 최댓값을 찾는 방법은 모든 〈수학Ⅱ〉, 〈미적분〉 교과서에서 공통으로 다루고 있다.

· 문항 【1-3】는 도함수를 이용하여 사각형 의 넓이의 최댓값을 구하고 최댓값이 주어졌을 때 실수를 찾을 수 있는지를 평가하는 문항이다. 삼각함수의 미분법 및 도함수를 활용하여 최댓값을 찾는 방법은 모든 〈미적분〉 교과서에서 공통으로 다루고 있다.

· 문항 【1-4】는 정적분을 이용하여 도형의 넓이를 구하고 치환을 이용하여 함수의 극한을 구할 수 있는지 평가하는 문항이다. 탄젠트 함수의 적분 및 치환을 이용하여 극한을 구하는 방법은 모든 〈미적분〉 교과서에서 공통으로 다루고 있는 내용이다.

3. 채점기준 및 유의사항

【1-1】

· 제시문 [가]에 주어진 그래프 개형을 그리는 방법을 바탕으로, 도함수와 이계도함수를 이용하여 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

【1-2】

· 접선의 방정식을 이용하여 삼각형의 넓이를 t로 나타낼 수 있다.

· 도함수의 부호를 이용하여 삼각형의 넓이의 최대, 최소를 판정할 수 있다.

【1-3】

· 문항 【1-1】을 이용하여 최대가 되는 t가 유일함을 보일 수 있다.

· 함수 $g(a)$를 점 B의 x좌표 $t=t_0$로 나타내고, t_0와 a의 관계를 이용하여 a를 구할 수 있다.

【1-4】

· 함수 $g(a)$와 $h(a)$를 점 B의 x좌표로 나타낼 수 있다.

· 제시문 [다]를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.

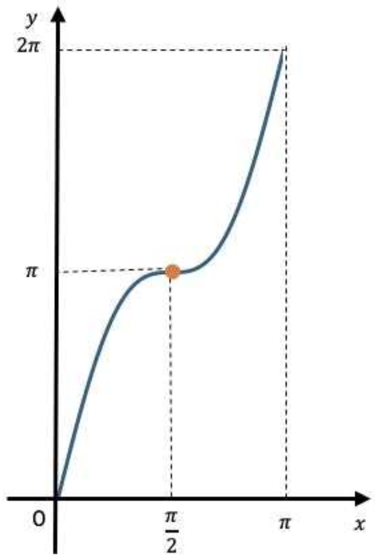
4. 예시답안

【1-1】 $f'(x)=2(1+\cos 2x)$이고 $f''(x)=-4\sin 2x$ 이므로, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면
다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$	4	$+$	0	$+$	4
$f''(x)$	-4	$-$	0	$+$	-4
$f(x)$	0	↗	π	↗	2π

따라서 $f(x)$는 증가함수이고 $0<x<\frac{\pi}{2}$일 때 위로 볼록, $\frac{\pi}{2}<x<\pi$일 때 아래로 볼록이다.

함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.



【1-2】 점 $(t, \tan t)$에서 접선의 방정식은 $y=\sec^2 t(x-t)+\tan t$ 이다.

$\mathrm{B}=(t-\sin t\cos t, 0)$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=\frac{\pi}{2}+\sin t\cos t-t$이다. 삼각형 ABC는 각 A가 직각인 직각삼각형이고 접선의 기울기가 $\sec^2 t$이므로 $\overline{\mathrm{BC}}=\sec^2 t\times\overline{\mathrm{AB}}$이다. 따라서

$$S(t)=\frac{1}{2}\sec^2 t\left(\frac{\pi}{2}+\sin t\cos t-t\right)^2,\quad 0\le t<\frac{\pi}{2}$$

$p(t)=\sec t\left(\frac{\pi}{2}+\sin t\cos t-t\right)$라 하면

$p'(t)=\sin t\sec^2 t\left(\frac{\pi}{2}-\sin t\cos t-t\right)=\frac{1}{2}\sin t\sec^2 t(\pi-\sin 2t-2t)$이다. 문항 【1-1】에 의해,

모든 $0 < t < \frac{\pi}{2}$에서 $p'(t) > 0$ 임고 $p(t)$는 $0 \le t < \frac{\pi}{2}$에서 증가함수이다.

$S(t) = \frac{1}{2}\{p(t)\}^2$이므로, $S(t)$도 $0 \le t < \frac{\pi}{2}$에서 증가함수이다. 따라서 $S(t)$의 최솟값은

$S(0) = \frac{\pi^2}{8}$이고, 최댓값은 존재하지 않는다.

【1-3】 사각형 ABCD의 넓이를 점 B의 좌표 t로 표현하면 $S(t) = (a-t)\tan t$ 이다.

$S'(t) = \sec^2 t(a - t - \sin t \cos t) = \frac{1}{2}\sec^2 t(2a - 2t - \sin 2t)$이므로, 문항 【1-1】에 의해 함수

$f(x) = 2a - 2x - \sin 2x$는 구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$의 오직 한 점에서만 0이 된다. 따라서 $S'(t)$는 구간

$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$의 오직 한 점 $t = t_0$에서 0이고, $t = t_0$일 때 $S(t)$의 값이 최대가 된다.

$S'(t_0) = 0$으로부터 $a - t_0 = \frac{1}{2}\sin 2t_0 = \cos t_0 \sin t_0$이므로 $g(a) = S(t_0) = \sin^2 t_0$이다. 따라서

$g(a) = \frac{1}{2}$이면 $t_0 = \frac{\pi}{4}$이고 $a = t_0 + \sin t_0 \cos t_0 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$이다.

【1-4】 문제 3의 풀이에 의해 $g(a) = \sin^2 t_0$이고 $h(a) = \int_0^{t_0} \tan x\, dx = -\ln(\cos t_0)$이다.

$0 < t_0 < a$이므로

$$\lim_{a \to 0^+} \frac{h(a)}{g(a)} = \lim_{t_0 \to 0^+} \frac{-\ln(\cos t_0)}{\sin^2 t_0} = \lim_{t_0 \to 0^+} \frac{\ln(\cos t_0)}{(1 + \cos t_0)(\cos t_0 - 1)}$$

$\cos t_0 - 1 = k$로 놓으면, $t_0 \to 0^+$일 때 $k \to 0^-$이므로

$$\lim_{a \to 0^+} \frac{h(a)}{g(a)} = \lim_{k \to 0^-} \frac{\ln(1+k)}{(2+k)k}$$

제시문 [다]에 의해 $\lim_{k \to 0} \frac{\ln(1+k)}{k} = 1$ 이므로, $\lim_{a \to 0^+} \frac{h(a)}{g(a)} = \frac{1}{2}$이다.